РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА

С. П. Мишин

ОПТИМАЛЬНЫЕ

ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЯ

В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 519
ББК 22.183.43 + 65в641
М71

Рецензент: д.т.н., проф. *Д.А. Новиков*

Мишин С.П. *

М71 Оптимальные иерархии управления в экономических системах. М.: ПМСОФТ, 2004. – 190 с.

ISBN 5-9900281-5-6

Аннотация

В современной экономике актуальна задача построения эффективной иерархии, реализующей функции управления организацией с наименьшими затратами. В настоящей работе построена математическая модель, в рамках которой найдены оптимальные иерархии управления. Это позволило промоделировать многие эффекты, имеющие место на практике: исследована оптимальность дивизиональной, функциональной и матричной иерархии в зависимости от нестабильности внешней среды, степени стандартизации, интенсивности функциональных связей, горизонтальной и вертикальной интеграции и т.п.

Книга адресована специалистам в области экономики, математического моделирования и управления социально-экономическими системами, а также аспирантам и студентам ВУЗов.

Ключевые слова: модель, управление, затраты, оптимальная, иерархия, дивизиональная, функциональная, матричная, структура.

ISBN 5-9900281-5-6

---

* Институт проблем управления Российской академии наук, Москва. E-mail: smishin@newmail.ru. Автор благодарит Ф. Т. Алескерова, А. А. Воронина, В. И. Данилова, М. В. Губко, М. И. Левина, Д. А. Новикова, В. М. Полтеровича, К. И. Сонина, участников конференций в Венгерской академии наук («Paul Erdos and His Mathematics», Будапешт 1999), Институте проблем управления («Теория активных систем», Москва 2001, 2003), участников семинаров в Центральном экономико-математическом институте, Высшей школе экономики, Российской экономической школе за ценные замечания.

Содержание

Введение 5
1. Базовая модель иерархии управления 14
1.1. Исполнители и технологическая сеть 15
1.2. Менеджеры и иерархии 17
1.3. Подчиненные группы исполнителей 19
1.4. Виды иерархий, норма управляемости 20
1.5. Управление потоками 22
1.6. Затраты на управление и оптимальная иерархия 25
1.7. Общий вид оптимальной иерархии 28
1.8. Достаточное условие оптимальности двухуровневой иерархии 31
1.9. Примеры 32
1.10. Оптимальная иерархия, управляющая симметричной линией 39
1.11. Оптимальная норма управляемости для степенной функции затрат и симметричной линии 45
2. Оптимальность функциональной, дивизиональной и матричной иерархий 55
2.1. Функционально связанные производственные линии. Продуктовые и функциональные потоки 55
2.2. Интенсивность продуктовых и функциональных .... потоков 59
2.3. Дивизионы и департаменты. Типичные иерархии 61
2.4. Постоянные и переменные затраты 66
2.5. Потоки и затраты менеджеров среднего звена и стратегических менеджеров 68
2.6. Функция затрат 75
2.7. Оптимальность типичных иерархий 79
2.8. Условия оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий 83
3. Обобщенная модель иерархии управления 94
3.1. Определение секционной функции затрат 95
3.2. Оптимальность древовидной иерархии 98
3.3. Оптимальность 2-иерархии и двухуровневой .... иерархии 104
3.4. Оптимальность последовательной иерархии 111

3.5. Примеры функции затрат на управление взаимодействием в группе 119
3.6. Метод непрерывной аппроксимации для поиска дерева с минимальными затратами 131
3.7. Оптимальная иерархия, управляющая несколькими группами исполнителей 136
Заключение 144
Приложение (доказательства формальных утверждений) 147
Литература 185

Введение

Любая экономическая система состоит из множества организованных некоторым образом сотрудников. Благодаря организации[1] сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (механизмов), что позволяет достичь цели системы.

Сотрудники организации специализированы, что повышает их эффективность по сравнению с множеством одиночных (неорганизованных) агентов. Однако взаимодействие сотрудников с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели системы. Это фундаментальная проблема любой организации, поскольку координация требует усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль ее результатов, согласование целей отдельных сотрудников и т.д. Для реализации управленческих функций в организации создается иерархия[2].

С одной стороны, иерархия позволяет снизить издержки взаимодействия сотрудников, например, с помощью планирования и контроля материальных, информационных и других потоков. С другой стороны, реализация управленческих функций требует затрат. В современных экономических системах доля менеджеров, выполняющих только управленческие функции, достигает 40% (см., например, Radner (1992)). Поэтому одним из ключевых факторов эффективности экономической системы является оптимальность иерархии, выполняющей управленческие функции с минимальными затратами.

[1] Ниже термины «организация» и «экономическая система» используются как синонимы. В данной работе под организацией понимается «объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил (механизмов)», то есть некоторая система, элементом которой является человек. Приведенные в работе интерпретации иерархии относятся к экономическим системам. Однако многие результаты справедливы также и для социальных систем.

[2] Сотрудники на более высоких уровнях иерархии обладают бóльшими правами, чем сотрудники нижних уровней. Это позволяет системе достичь цели даже в случае конфликтов между сотрудниками.

Для небольшой системы оптимальной может быть двухуровневая иерархия, в которой на первом (нижнем) уровне находятся рядовые исполнители, а на втором – единственный менеджер. Однако при росте системы один менеджер уже не способен управлять всеми взаимодействиями исполнителей. Таким образом, необходимо нанять нескольких менеджеров на второй уровень иерархии, возложив на каждого из них ответственность за управление взаимодействиями внутри подчиненной группы исполнителей. Взаимодействие между группами, которые подчинены менеджерам второго уровня, порождает взаимодействие между менеджерами. Этим взаимодействием также необходимо управлять с помощью менеджеров третьего уровня и т. д. Подобным образом может быть построена многоуровневая иерархия с единственным менеджером на высшем уровне. Вышестоящий менеджер (начальник) в иерархии уполномочен управлять подчиненными сотрудниками (менеджерами или исполнителями), а подчиненные обеспечивают начальников информацией и выполняют их распоряжения.

Построение иерархии – это один из аспектов создания экономической системы. В литературе по менеджменту процесс построения (или реорганизации) экономической системы делится на три фазы[3] (см. например Mintzberg (1979), Williamson (1975)):

I. Разработка технологии: определяется состав исполнителей, их функции и порядок взаимодействия.

II. Разработка иерархии (органиграммы): определяется количество менеджеров и состав сотрудников, которыми управляет каждый менеджер.

III. Разработка механизмов управления: определяются полномочия начальников по отношению к их подчиненным[4].

Разработка технологии обычно выполняется экспертом в соответствующей предметной области. Для оптимизации технологии разработаны математические модели различных отраслей, производств и т.п. Часто в реальных организациях порядок взаимодействия исполнителей не регламентирован. В этом случае технологию

[3] В идеале необходимо рассматривать все три фазы совместно. Однако это крайне сложная задача. Для ее упрощения фазы рассматриваются по отдельности.

[4] Например, права и обязанности каждого сотрудника.

можно описать, например, с помощью методологии функционального моделирования (IDEF)[5]. Технологические взаимодействия между исполнителями можно описать математически с помощью взвешенной сети. Вес каждой связи сети соответствует интенсивности взаимодействия.

Имеется большое количество математических моделей механизмов управления (фаза III). Детально изучены механизмы управления в двухуровневой иерархии (проблема центр-агент, см., например, Бурков и Новиков (1999), Hart и Holmstrom (1987), Grossman и Hart (1982 и 1983)). Разработаны механизмы управления для некоторых типов многоуровневой иерархии (например, Новиков (1999, 2003) исследовал игровые модели многоуровневых иерархий, Melumad, Mookherjee и Reichelstein (1995) исследовали механизм делегирования полномочий в трехуровневой иерархии).

В данной работе рассматривается фаза II. Небольшое количество работ посвящено проблеме оптимизации иерархии (фаза II), или иерархии совместно с механизмами (фазы II и III). Впервые математическую модель иерархической организации исследовал Simon (1957). Модель основана на следующих предположениях:

1. Все функции организации, за исключением управленческих, выполняют рядовые исполнители, находящиеся на первом (низшем) уровне иерархии. На более высоких уровнях находятся менеджеры, управляющие подчиненными сотрудниками.

2. У каждого сотрудника только один непосредственный начальник, расположенный на следующем уровне, то есть иерархия представляет собой дерево, в котором возможны только взаимодействия сотрудников соседних уровней.

3. Норма управляемости (число непосредственных подчиненных менеджера) и ставка заработной платы одинакова на одном уровне (сотрудники одного уровня однородны).

4. Норма управляемости одинакова на различных уровнях.

[5] Сначала определяются несколько ключевых функций (закупки, продажи, производство, документооборот и т.п.). Затем производится их детальная декомпозиция (разбиение на подфункции), вплоть до элементарных функций, выполняемых одним исполнителем. В процессе декомпозиции выявляются связи между исполнителями.

5. Ставка заработной платы следующего уровня равна ставке предыдущего, умноженной на одну и ту же константу, не зависящую от уровня и вида иерархии (константа задана «извне»).

На основе этой модели Williamson (1967) определил ограничения на размер организации, вызванные потерей контроля из-за снижения эффективности работы сотрудника от уровня к уровню. При этом константа снижения эффективности задавалась «извне» и не зависела от параметров модели. Calvo и Wellisz (1978) связали снижение эффективности сотрудника со степенью его контроля непосредственным начальником. Чем больше у начальника непосредственных подчиненных, тем меньше вероятность того, что подчиненный будет проконтролирован, и ниже его эффективность. Опираясь на это предположение, Calvo и Wellisz (1979) рассмотрели модель максимизации прибыли – разности дохода организации (произведение числа исполнителей на их эффективность) и затрат на заработную плату сотрудников. В модели возможна различная норма управляемости и различные ставки заработной платы на разных уровнях (жесткие ограничения 4 и 5 не предполагаются выполненными). В результате Calvo и Wellisz (1979) доказали ряд важных закономерностей. Например, в оптимальной иерархии с ростом уровня растет эффективность сотрудника, растет ставка заработной платы на единицу эффективности.

Keren и Levhari (1983) оптимизировали время принятия решения иерархией[6] (задержка на каждом уровне равна норме управляемости плюс константа). После оптимизации вычислялись средние затраты на одного сотрудника и обосновывались пределы роста. Этот подход развит в ряде работ (см., например, Van Zandt (1996), Bolton и Dewatripont (1994), Radner (1993)).

Qian (1994) исследовал модель Calvo и Wellisz (1979) с помощью аппарата оптимального управления. Количество сотрудников на каждом уровне предполагается континуальным, что позволяет упростить дискретную задачу, заменив ее непрерывной. Подобный

[6] Впервые модель менеджеров иерархии, вычисляющих некоторое «решение» (управляющее воздействие), предложили Marschak и Radner (1972).

метод впервые предложили Keren и Levhari (1979).[7] Если требуется, чтобы исполнители работали с максимальной эффективностью, то в модели Calvo и Wellisz (1979) заработная плата сотрудника зависит только от нормы управляемости его непосредственного начальника[8]. Для максимизации прибыли остается минимизировать сумму затрат на заработную плату (эффективность сотрудников максимальна). Для этой задачи[9] Qian (1994) нашел оптимальную иерархию.

Как и в модели Qian (1994), в настоящей работе решается задача об оптимальной иерархии, которая минимизирует сумму затрат на заработную плату сотрудников. Однако, в отличие от вышеуказанной модели, мы рассматриваем функцию заработной платы, зависящую не только от нормы управляемости, но и от состава тех исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера, то есть от специфики и сложности решаемых управленческих задач (такая функция названа в работе «*секционной*»). Таким образом, сотрудники не предполагаются однородными. Кроме того, мы рассматриваем недревовидные иерархии и возможность взаимодействия между любыми уровнями[10]. Поэтому в отличие от всех указанных выше работ в настоящей работе не требуется выполнения предположений 2 и 3 (требуется лишь выполнение базового предположения 1). В связи с этим рассматриваемая задача становится значительно более сложной. Для ее решения мы делаем дополнительное допущение: любая иерархия обеспечивает максимальную эффективность работы

---

[7] Допустимость замены дискретной задачи непрерывной исследуется в работе Van Zandt (1995).

[8] Выгода сотрудника при уклонении от работы (например, полезность свободного времени) не должна превышать заработной платы, умноженной на вероятность ее потерять в случае, если начальник сможет проконтролировать уклонение от работы (вероятность обратно пропорциональна норме управляемости). Из этого условия однозначно определяется минимальная заработная плата необходимая для того, чтобы сотрудник работал с максимальной эффективностью. Заработная плата линейно зависит от нормы управляемости непосредственного начальника.

[9] Также Qian (1994) исследовал более сложные случаи.

[10] Это позволяет в рамках модели найти условия оптимальности дерева, симметричного дерева, в котором возможны только взаимодействия соседних уровней, и т.п.

сотрудников, то есть для оптимизации достаточно найти иерархию с минимальными затратами. Таким образом, не рассматриваются механизмы управления (фаза III), а считается известной (заданной «извне») функция затрат сотрудника[11] и предполагается, что для максимально эффективного выполнения им своих обязанностей достаточно обеспечить заработную плату равную затратам. В частности, не рассматриваются механизмы стимулирования сотрудников[12].

В отечественных работах (см., например, Дементьев, Ерзин, Ларин и др. (1996), Цвиркун (1982), Овсиевич (1979)) условия 1–3 также предполагаются выполненными. Поэтому рассмотренная выше новизна настоящей работы относится и к отечественной, и к зарубежной литературе по исследованию иерархий.

Одним из наиболее известных аспектов проблемы оптимизации иерархии является сравнение дивизиональной, функциональной и матричной иерархий[13]. Преимущества и недостатки этих видов иерархии рассматриваются во многих работах по менеджменту (см., например, Mintzberg (1979)). В дивизиональной иерархии все потоки, относящиеся к одному продукту (региону, покупателю и т.п.), управляются дивизиональными менеджерами (например, можно нанять брэнд-менеджеров, каждый из которых отвечает за отдельный продукт, взаимодействием брэнд-менеджеров управляют стратегические менеджеры на верхних уровнях иерархии). Наоборот, в функциональной иерархии все потоки, относящиеся к одному роду деятельности (продажи, закупки, производство и т.д.), управляются функциональными менеджерами, а их взаимодействием управляют стратегические менеджеры. В матричной иерархии

[11] В работе исследованы различные функции затрат. Например, функции затрат могут определяться технологической сетью (результатом фазы I) и возможными механизмами управления (результатом фазы III).

[12] При полной информации легко построить механизм стимулирования, в котором заработная плата компенсирует затраты, если сотрудник работает максимально эффективно, и не выплачивается в противном случае (Мишин (2004a)). Подходы к построению механизмов стимулирования в условиях неполной информации кратко обсуждаются в заключении.

[13] В некоторых работах вместо терминов дивизиональная и функциональная иерархия используются термины M-form (multi-divisional form) и U-form (unitary form).

каждый исполнитель относится к одному дивизиону и к одному департаменту, то есть все потоки управляются дивизиональными и функциональными менеджерами, а высшие менеджеры выполняют стратегические функции.

В последнее время были созданы математические модели, позволяющие сравнивать дивизиональную, функциональную и матричную иерархии. Например, Maskin, Qian и Xu (2000), Qian, Roland и Xu (1997), Milgrom и Roberts (1992) разработали модели, обосновывающие в ряде случаев преимущества дивизиональной иерархии перед функциональной. Harris и Raviv (2002) рассмотрели модель с двумя «производственными линиями», каждая из которых состоит из двух «исполнителей» (например, подразделения маркетинга и разработки в Норвегии и США). В указанной работе сравниваются всевозможные иерархии, которые можно надстроить над этими четырьмя «исполнителями». Однако в достаточно большой организации этот подход неприменим в силу огромного количества возможных иерархий управления.

В рамках модели, рассматриваемой в настоящей работе, оптимальность дивизиональных, функциональных и матричных иерархий доказана для организации произвольного размера. Это представляется весьма важным, поскольку в общем случае указанные иерархии могут иметь значительно б*о*льшие затраты, чем оптимальная иерархия. В настоящей работе доказано, что менеджеры среднего звена должны управлять наиболее интенсивными потоками, снижая нагрузку стратегических менеджеров. Аналогичный результат получили Harris и Raviv (2002). В настоящей работе также доказано, что при снижении стабильности внешней среды и стандартизации[14] становится оптимальной матричная иерархия. Таким образом, матричная иерархия устойчива к снижению стандартизации и стабильности. Наоборот, дивизиональная и функциональная иерархии устойчивы к повышению стандартизации и стабильности внешней среды.

[14] Под стандартизацией понимаются, например, нормы и правила работы исполнителей, стандарты выпускаемой ими продукции, общие знания и навыки и т.п. Подробнее описание видов стандартизации см. в работе Mintzberg (1979).

Модель, предложенная в настоящей работе, позволяет анализировать изменение вида оптимальной иерархии в результате горизонтальной интеграции (например, покупка аналогичного бизнеса в другом регионе), вертикальной интеграции (например, покупка организаций, поставляющих сырье или потребляющих продукцию), изменения объемов производства или интенсивности функциональных связей и т.п. Доказано, что дивизиональная иерархия устойчива по отношению к горизонтальной интеграции и росту объемов производства без усиления функциональных связей. Вертикальная интеграция и усиление функциональных связей могут привести к необходимости реструктуризации. Наоборот, функциональная иерархия устойчива по отношению к вертикальной интеграции и росту функциональных связей. Горизонтальная интеграция и рост объемов производства могут привести к необходимости реструктуризации.

Указанные закономерности наблюдаются на практике. Многочисленные примеры (см., например, Mintzberg (1979)) приводятся в работах по менеджменту без строгих доказательств. В рамках модели, предложенной в настоящей работе, удается доказать эти закономерности формально, что говорит об адекватности модели реальным экономическим системам.

Функция затрат, для которой доказана оптимальность дивизиональной, функциональной или матричной иерархии, является частным случаем так называемой секционной функции (затраты менеджера определяются составом исполнителей, управляемых непосредственными подчиненными, то есть «задачами» той «секции» (отдела, звена и т.п.), которой менеджер управляет непосредственно). Класс секционных функций интересен и с математической точки зрения. Любая функция затрат иерархии, аддитивная по добавлению менеджеров и анонимная по перестановке менеджеров, будет секционной (Воронин и Мишин (2003), Мишин (2003b)). В настоящей работе созданы методы поиска оптимальной иерархии, которые могут быть применены к широким классам секционных функций. Созданные методы не зависят от вида конкретной функции, от того, из каких практических соображений она определена.

Работа имеет следующую структуру. В главе 1 изложены базовые определения и доказаны утверждения, используемые в дальнейшем, приведены поясняющие примеры. В главе 2 при определенных ограничениях доказана оптимальность дивизиональной, функциональной и матричной иерархии. В главе 3 исследована обобщенная модель – рассмотрен класс всех секционных функций – и предложены методы поиска оптимальной иерархии. Созданные методы использованы для исследования функций затрат, соответствующих различным типам взаимодействия менеджеров и непосредственных подчиненных.

В заключении кратко обсуждаются итоги работы и перспективы дальнейших исследований.

Доказательства всех формальных утверждений вынесены в приложение.

1. Базовая модель иерархии управления

В базовой модели, рассматриваемой в настоящем разделе, определяется иерархия, управляющая множеством исполнителей. Затраты менеджера иерархии зависят от потоков между теми исполнителями, которыми управляет менеджер. Приводятся примеры, показывающие, что подобная функция затрат может описывать ряд эффектов, имеющих место на практике – в реальных организациях.

Функция затрат позволяет сравнивать иерархии друг с другом. Если функция соответствует реальной организации, то можно рассчитать затраты нескольких «типичных» вариантов иерархии и определить наилучший вариант. Однако гораздо важнее, что при наличии функции затрат можно поставить задачу поиска оптимальной иерархии, имеющей минимальные затраты среди всего множества иерархических структур, управляющих заданными исполнителями. Затраты оптимальной иерархии могут быть значительно ниже затрат «типичных» вариантов. Поэтому весьма важно найти оптимальную иерархию. Несмотря на большую сложность этой задачи, в ряде случае ее удается решить. Методы решения излагаются в данной работе. Некоторые постановки, аналогичные базовой модели, рассмотрены в работах Губко и Мишина (2002), Мишина (2004b).

В рамках базовой модели найдена оптимальная иерархия над симметричной производственной линией. Этот результат использован в главе 2. Более сложные постановки в рамках базовой модели не исследуются, поскольку удобнее исследовать сразу обобщенную модель (глава 3).

Разделы 1.1-1.6 описывают постановку задачи, которая рассматривается в базовой модели. Все определения используются ниже в главах 2 и 3, за исключением того, что функция затрат имеет другой вид. Результаты раздела 1.7 позволяют исключить заведомо неоптимальные иерархии и описать условия, которым удовлетворяет оптимальная иерархия. В разделе 1.8 приведено достаточное условие оптимальности простейшей иерархии с одним менеджером. Ниже в главе 3 это условие обобщается на класс всех секционных функций. В разделе 1.9 приводятся примеры содержательных интерпретаций базовой модели, иллюстрирующие некоторые эффекты, возникающие в реальных организациях. В разделах 1.10 и 1.11 найдена оптимальная иерархия над симметричной производственной линией.

1.1. Исполнители и технологическая сеть

Пусть $N=\{w_1,\ldots,w_n\}$ – множество *исполнителей*, которые могут взаимодействовать друг с другом. Через w_{env} будем обозначать *внешнюю среду*, взаимодействующую с исполнителями. Иногда исполнители будут обозначаться через $w, w', w'' \in N$.

Функцией потока назовем следующую функцию:

$$f:(N\cup\{w_{env}\})\times(N\cup\{w_{env}\})\to R_+^p, \qquad (1)$$

то есть для каждой пары исполнителей $w', w'' \in N$ вектор $f(w',w'')$ определяет *интенсивность потоков* между w' и w''. Этот вектор содержит p неотрицательных компонент. Каждая компонента определяет интенсивность одного типа взаимодействия исполнителей (материальный, информационный или прочий тип потока). Например, $f(w',w'')=(1;0)$ можно интерпретировать как наличие материальных потоков и отсутствие информационных потоков между w' и w''. Вектор $f(w',w'')=(2;1)$ обозначает бóльший поток, чем (1;0). Таким образом, технология взаимодействия исполнителей определяет функцию потока f или взвешенную *технологическую сеть f*. Вектор $f(w_{env},w)$ соответствует интенсивности потоков между исполнителем w и внешней средой, $w\in N$.

Потоки между исполнителями назовем *потоками внутри технологической сети*, потоки между исполнителями и внешней средой назовем *потоками между технологической сетью и внешней средой*.

В работе технологическая сеть считается *неориентированной*, поскольку в рассматриваемой модели направление потока не играет роли. Поэтому $f(w',w'')=f(w'',w')$ для любых $w', w'' \in N\cup\{w_{env}\}$.

Будем говорить, что между w' и w'' отсутствует *связь* тогда и только тогда, когда поток между исполнителями нулевой[15]. Таким образом, наличие *связи* означает, что между w' и w'' протекают некоторые потоки. Также предполагаем, что сеть не содержит петель, то есть для любого исполнителя w выполнено $f(w,w)=0$.

Рассмотрим пример. Пусть $N=\{w_1,w_2,w_3\}$ и $p=1$, то есть имеются трое исполнителей и потоки одного типа. Будем считать, что в технологической сети имеются четыре связи $f(w_{env},w_1)=\lambda$, $f(w_1,w_2)=\lambda$, $f(w_2,w_3)=\lambda$, $f(w_3,w_{env})=\lambda$, где λ – вектор интенсивности потоков. Эта технологическая сеть изображена на рисунке 1.

На рисунке не показана внешняя среда. Поэтому связи, соединяющие исполнителей w_1 и w_3 с внешней средой, имеют «висячий» конец. Данный пример может соответствовать производственной линии («бизнес процессу»). Исполнитель w_1 принимает сырье от поставщика, проводит первичную обработку и передает результат исполнителю w_2. Тот выполняет очередную технологическую операцию и передает результат далее. Последний исполнитель (в примере w_3), выполнив последнюю технологическую операцию, отгружает продукцию потребителю.

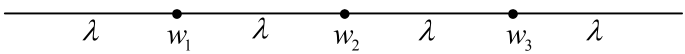

Рисунок 1. Симметричная производственная линия

Сеть с исполнителями $N=\{w_1,...,w_n\}$ и потоками $f(w_{env},w_1)=\lambda$, $f(w_{i-1},w_i)=\lambda$ для всех $2\le i\le n$, $f(w_n,w_{env})=\lambda$ будем ниже называть *симметричной производственной линией*[16], а λ – *интенсивностью линии*.

В *несимметричной производственной линии* возможны потоки различной интенсивности. Изменение интенсивности может

[15] То есть $f(w',w'')=0$. Равенство означает, что все компоненты вектора равны нулю.

[16] Все остальные потоки подразумеваются равными нулю.

быть вызвано особенностями взаимодействия между исполнителями на различных этапах производства.

1.2. Менеджеры и иерархии

Обозначим через M конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры обычно будут обозначаться через $m, m', m'', m_1, m_2, \ldots \in M$.

Пусть $V = N \cup M$ – все множество *сотрудников* организации (исполнителей и менеджеров). Рассмотрим множество *ребер подчиненности* $E \subseteq V \times M$. Ребро $(v, m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in V$ является *непосредственным подчиненным* менеджера $m \in M$, а m – *непосредственным начальником* сотрудника v. Таким образом, ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику.

Сотрудник $v \in V$ является *подчиненным* менеджера $m \in M$ (менеджер m является *начальником* сотрудника v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m. То есть найдется такая последовательность менеджеров $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$, что сотрудник v непосредственно подчинен менеджеру m_1, $(v, m_1) \in E$, менеджер m_j непосредственно подчинен менеджеру m_{j+1}, $(m_j, m_{j+1}) \in E$ для каждого $1 \le j \le k-1$, $m_k = m$. Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником.

Теперь можно дать строгое определение иерархии.

Определение 1. *Ориентированный граф* $H = (N \cup M, E)$ *с множеством менеджеров M и множеством ребер подчиненности* $E \subseteq (N \cup M) \times M$ *назовем иерархией, управляющей множеством исполнителей N, если граф H ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через* $\Omega(N)$ *обозначим множество всех иерархий.*

Ацикличность означает, что не существует «порочного круга» подчиненности. Предположим, что некоторые менеджеры

$m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$ образуют цикл, то есть $(m_j, m_{j+1}) \in E$ для каждого $1 \le j \le k-1$, $(m_k, m_1) \in E$. Тогда каждый менеджер является одновременно и начальником, и подчиненным всех остальных. Такой вариант противоречит самому понятию подчиненности и поэтому в определении 1 исключен априори.

Определение также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без подчиненных, так как это противоречит роли менеджера, который должен управлять некоторыми сотрудниками.

Существование менеджера, которому подчинены все исполнители, означает, что у любого множества исполнителей найдется общий начальник, то есть иерархия способна управлять взаимодействием всех исполнителей[17].

На рисунке 2 приведены примеры двух иерархий, надстроенных над производственной линией из четырех исполнителей. Как видно из рисунка, иерархия a) имеет «классический» вид – у каждого сотрудника ровно один непосредственный начальник (за исключением начальника верхнего уровня). На рисунке 2b) присутствует множественное подчинение. Кроме того, на рисунке 2b) некоторым начальникам непосредственно подчинены и менеджеры, и исполнители. То, что рассматриваемая модель позволяет описывать подобные эффекты, представляется весьма важным, поскольку они часто встречаются в экономических системах.

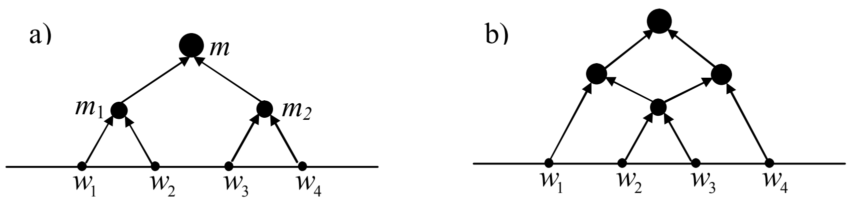

Рисунок 2. Примеры иерархий над производственной линией

[17] Это требование вполне логично, поскольку иерархия над множеством исполнителей надстраивается как раз для управления их взаимодействием.

1.3. Подчиненные группы исполнителей

Для определения затрат менеджера необходимо формализовать его «роль» в организации (обязанности, объем выполняемой работы и т.п.). Считаем, что «роль» менеджера определяется теми исполнителями, которыми управляет менеджер. Ниже введено соответствующее определение группы, управляемой менеджером.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей.

По определению 1 в любой иерархии H каждый менеджер имеет, по крайней мере, одного непосредственного подчиненного. Начав с любого менеджера m, мы можем двигаться по иерархии «сверху вниз» к подчиненным менеджера m. В итоге можно определить множество исполнителей, подчиненных менеджеру m. Будем называть это множество *подчиненной группой исполнителей* и обозначать $s_H(m) \subseteq N$. Будем также говорить, что менеджер m *управляет группой исполнителей* $s_H(m)$.

В силу ацикличности каждому менеджеру подчинен хотя бы один исполнитель. Поэтому каждый менеджер управляет непустой группой исполнителей.

Ниже в обозначении группы $s_H(m)$ будем опускать нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь.

Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что в любой иерархии $H \in \Omega(N)$ любому исполнителю $w \in N$ «подчинена» простейшая группа $s_H(w)=\{w\}$, состоящая из самого исполнителя. Также будем говорить, что исполнитель «управляет» простейшей группой $s_H(w)=\{w\}$.

На рисунке 3 плоскость соответствует технологической сети, над которой надстраивается иерархия. Над плоскостью изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m. Она состоит из непосредственных подчиненных менеджера m и подчиненных, которыми менеджер m не управляет непосредственно. Подчиненная группа исполнителей $s_H(m)$ обведена на рисунке эллипсом.

Сформулируем простую лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Для любой иерархии H и любого менеджера $m \in M$ выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$, где $v_1,\ldots,v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m. Для любого подчиненного v менеджера m выполнено $s_H(v) \subseteq s_H(m)$.

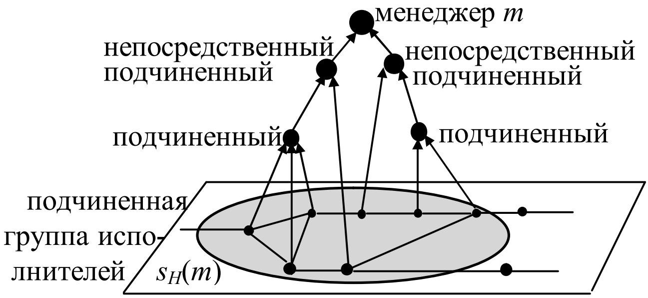

Рисунок 3. Менеджер и подчиненная ему группа исполнителей

Проиллюстрируем результат леммы на примере. На рисунке 2a) менеджеру m непосредственно подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджеру m подчинена группа $s(m)=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$. Менеджерам m_1 и m_2 подчинены группы $s(m_1)=\{w_1,w_2\}$ и $s(m_2)=\{w_3,w_4\}$ соответственно. Таким образом, группа $s(m)$ разбивается на две подгруппы $s(m_1)$ и $s(m_2)$: $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}=\{w_1,w_2\} \cup \{w_3,w_4\}$. В данном примере подгруппы не пересекаются. В общем случае, как показано на рисунке 2b), пересечения могут иметь место.

1.4. Виды иерархий, норма управляемости

Определим несколько частных видов иерархии и введем понятие нормы управляемости.

Определение 2. *Иерархию назовем деревом, если в ней только один менеджер m не имеет начальников, а все остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника. Менеджера m будем называть корнем дерева.*

На рисунке 2a) изображен пример дерева. Напротив, иерархия на рисунке 2b) деревом не является, так как в ней один менеджер имеет двух непосредственных начальников. Сформулируем еще одну простую лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 2. *Пусть в иерархии H только один менеджер не имеет начальников. Иерархия H будет деревом тогда и только тогда, когда непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей.*

Таким образом, при наличии единственного менеджера без начальников в дереве и только в нем непосредственные подчиненные любого менеджера не «дублируют» обязанности друг друга, то есть не управляют одним и тем же исполнителем.

Определение 3. *Иерархию назовем r-иерархией, если у каждого ее менеджера не более r непосредственных подчиненных, где* $r>1$ *– целое число. r-иерархию, которая является деревом, назовем r-деревом.*

В литературе по менеджменту часто используется термин «*норма управляемости*» – максимальное количество непосредственных подчиненных, которыми может управлять один менеджер. Определение r-иерархии соответствует норме управляемости, равной r.

В силу леммы 2 в дереве непосредственные подчиненные менеджера управляют непересекающимися группами. Даже если все эти группы состоят из одного исполнителя, их количество не превышает количества исполнителей n. То есть в дереве норма управляемости не превосходит n. Максимальную среди всех деревьев норму управляемости имеет *двухуровневая иерархия*, в которой одному менеджеру непосредственно подчинены все исполнители (см. рисунок 4).

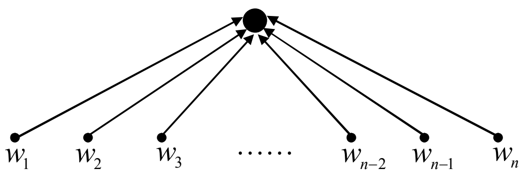

Рисунок 4. Двухуровневая иерархия

1.5. Управление потоками

В базовой модели затраты менеджера зависят от потоков технологической сети. Для определения потоков, в управлении которыми задействован менеджер, приведем некоторые пояснения.

На практике в отдельные моменты времени поток между исполнителями изменяется, но в среднем за достаточно большой промежуток времени (например, за месяц или за год) предполагаем поток неизменным. То есть, считаем, что технологическая сеть (функция f) задана и неизменна. Например, за год предприятие может произвести и реализовать 1000 тонн продукции. Эту величину и может описывать функция потока f. Для того, чтобы необходимая величина потока действительно реализовалась, необходимо постоянное управление взаимодействием исполнителей.

Каждый менеджер управляет потоками между подчиненными исполнителями. Одна из интерпретаций работы менеджера – управление реализацией планов. Топ-менеджеры формулируют оперативный план, который необходимо реализовать. Например, план может включать дневной или недельный объем продаж и закупок, то есть потоки между исполнителями и внешней средой. В процессе уточнения плана менеджеры на каждом уровне детализируют те его части, за которые они ответственны. Например, для обеспечения объема продаж, запланированного топ-менеджером, директор по производству может планировать соответствующие производственные потоки. После уточнения на всех уровнях детализированный план реализуется исполнителями. При этом каждый менеджер отслеживает реализацию своих планов. Таким образом, менеджер управляет некоторыми потоками в технологической сети (например, планирует эти потоки, а также контролирует выполнение планов).

Перед формулировкой строгих определений приведем пример, поясняющий, в управлении какими потоками задействован менеджер.

Предположим, что в иерархии, изображенной на рисунке 5, в результате конфликта между исполнителями w_2 и w_3 фактический поток между w_2 и w_3 меньше необходимой величины потока

$f(w_2,w_3)$. Исполнитель w_2 сообщает своему непосредственному начальнику m_1, что у него возникли проблемы. Менеджер m_1 не в состоянии разрешить конфликт, так как исполнитель w_3 ему не подчинен. Аналогично, менеджер m_2 не в состоянии самостоятельно справиться с конфликтом, о котором ему сообщил исполнитель w_3. В итоге менеджеры m_1 и m_2 сообщат о конфликте своему непосредственному начальнику m, который и примет решение, ликвидирующее конфликт. Это решение менеджеры m_1 и m_2 передадут соответственно исполнителям w_2 и w_3. Аналогично можно рассмотреть планирование потока $f(w_2,w_3)$. Менеджер m передает план потока $f(w_2,w_3)$ менеджерам m_1 и m_2, которые доводят план до исполнителей w_2 и w_3 соответственно. Факт выполнения плана доводится до менеджера m в обратном порядке.

Таким образом, в управлении потоком $f(w_2,w_3)$ задействованы менеджеры m_1, m_2 и m. В управлении потоком $f(w_1,w_2)$ задействован только менеджер m_1, так как он самостоятельно принимает все решения, связанные с потоком $f(w_1,w_2)$. Аналогично, в управлении потоком $f(w_3,w_4)$ задействован только менеджер m_2.

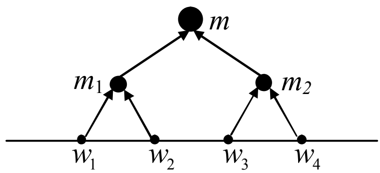

Рисунок 5. Дерево управления производственной линией

В управлении внешним потоком $f(w_{env},w_1)$ участвуют менеджеры m_1 и m. Например, план закупок определяется менеджером m, уточняется менеджером m_1 и передается исполнителю w_1. Аналогично, в управлении внешним потоком $f(w_4,w_{env})$ участвуют менеджеры m_2 и m.

Можно выписать сумму потоков, с которыми имеет дело каждый из менеджеров при управлении исполнителями:

m_1: $f(w_1,w_2)+ (f(w_{env},w_1)+ f(w_2,w_3))$,

m_2: $f(w_3,w_4) + (f(w_2,w_3)+ f(w_4,w_{env}))$,

m: $f(w_2,w_3) + (f(w_{env},w_1)+ f(w_4,w_{env}))$.

Из примера видно, что любой менеджер выполняет обязанности двух типов:

1. Управляет теми потоками внутри подчиненной группы, которые не управляются подчиненными менеджерами. Например, на рисунке 5 менеджер m управляет потоком $f(w_2, w_3)$.

2. Участвует в управлении потоками между подчиненной группой и всеми остальными исполнителями, внешней средой. Эта компонента потока указана в приведенных выше выражениях в скобках. Например, на рисунке 5 менеджер m_1 участвует в управлении потоками $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_3)$.

Введем формальное определение обязанностей менеджера.

Определение 4. *В иерархии $H \in \Omega(N)$ менеджер m выполняет обязанности двух типов:*

1. *Управляет потоками $f(w', w'')$ между подчиненными исполнителями $w', w'' \in s_H(m)$, которые не управляются ни одним подчиненным менеджера m. Сумму таких потоков назовем внутренним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{\mathrm{int}}(m)$;*

2. *Участвует в управлении потоками $f(w', w'')$ между подчиненным исполнителем $w' \in s_H(m)$ и неподчиненным исполнителем $w'' \in N \setminus s_H(m)$ или внешней средой $w'' = w_{env}$. Сумму таких потоков назовем внешним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{ext}(m)$.*

Таким образом, **менеджер управляет внутренним потоком и участвует в управлении внешним. *Потоком менеджера* назовем сумму его внутренних и внешних потоков**.

Из определения следует, что внешний поток менеджера m равен:

$$F_H^{ext}(m) = \sum_{\substack{w' \in s_H(m), \\ w'' \in (N \setminus s_H(m)) \cup \{w_{env}\}}} f(w', w''). \tag{2}$$

Внутренний поток определяется следующей простой леммой.

Лемма 3. *Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m в иерархии H. Тогда внутренний поток менеджера m равен*

$$F_H^{\text{int}}(m) = \sum_{\substack{\{w',w''\}\subseteq s_H(m), \\ \{w',w''\}\not\subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1\le j\le k}} f(w',w'') . \tag{3}$$

Таким образом, при суммировании потоков $f(w',w'')$ внутри группы $s_H(m)$ достаточно проверить, чтобы поток не входил в группы, управляемые непосредственными подчиненными. В этом и только в этом случае поток не будет управляться ни одним подчиненным менеджера, то есть будет входить в его внутренний поток.

Таким образом, при заданных N и f внутренний и внешний поток менеджера m зависит только от $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$, то есть от групп исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера m.

По определению 1 в любой иерархии H найдется менеджер m, управляющий всеми исполнителями. По определению 4 для любых исполнителей $w',w''\in N$ поток $f(w',w'')$ управляется либо самим менеджером m, либо одним из подчиненных ему менеджеров. Таким образом, **каждый поток внутри технологической сети управляется по крайней мере одним менеджером в любой иерархии**.

Таким образом, любая иерархия обеспечивает управление всеми потоками. Однако в различных иерархиях различается количество менеджеров и «нагрузка» каждого из менеджеров. Поэтому из всего множества иерархий $\Omega(N)$ необходимо выбрать «наилучшую» иерархию. Формальная постановка этой задачи приведена в следующем разделе.

1.6. Затраты на управление и оптимальная иерархия

Управление исполнителями требует от менеджера некоторых затрат. В базовой модели будем считать, что затраты менеджера зависят только от суммы потоков, которыми управляет менеджер, и в управлении которыми он участвует. Сформулируем строгое определение.

Определение 5. *Затратами менеджера* $m\in M$ *в иерархии* $H\in\Omega(N)$ *назовем величину:*

$$c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) = \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m)), \qquad (4)$$

где $v_1,\ldots,v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m, $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ – управляемые ими группы, $\varphi : R_+^p \to R_+$ – монотонно неубывающая по всем переменным функция, ставящая в соответствие вектору $F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m)$ потока неотрицательное действительное число.

Таким образом, затраты менеджера определяются функцией $\varphi(\cdot)$, зависящей от потоков менеджера. Неубывание функции $\varphi(\cdot)$ означает, что при увеличении одной или нескольких компонент потока, то есть при увеличении «объема» управленческой работы, затраты на управление не могут снизиться. Кроме того, затраты на управление не могут быть отрицательными.

Суммарные затраты всей иерархии складываются из затрат менеджеров. Оптимальной будет та иерархия, которая минимизирует суммарные затраты. Дадим строгое определение.

Определение 6. *Затратами иерархии $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$ назовем сумму затрат всех ее менеджеров*[18]:

$$c(H) = \sum\nolimits_{m\in M} c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) = \sum\nolimits_{m\in M} \varphi(F_H^{\text{int}}(m) + F_H^{ext}(m)), \quad (5)$$

где $v_1,\ldots,v_k$– все непосредственные подчиненные менеджера m.

Оптимальной иерархией назовем иерархию H^*, затраты которой минимальны $H^* \in Arg\min_{H\in\Omega} c(H)$.

Оптимальных иерархий может быть несколько. **Ниже мы будем решать задачу поиска одной из оптимальных иерархий**. При этом множество исполнителей N предполагается известным. Необходимо найти иерархию (то есть определить количество менеджеров и их подчиненность) из $\Omega(N)$, минимизирующую затраты на управление исполнителями.

Считаем, что после нахождения оптимальной иерархии можно принять на работу менеджеров, которые будут выполнять свои

[18] В выражении (5) и ниже одной и той же буквой $c(\cdot)$ обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.

обязанности, если им компенсировать только их затраты[19] (например, выплачивать зарплату). Разумеется, для этого необходима полная информация о функции затрат. При наличии такой информации в работе Мишина (2004а) построен простой механизм стимулирования, обеспечивающий минимальные выплаты, равные затратам. Также в указанной работе рассмотрены некоторые механизмы стимулирования при неполной информации.

Ниже в настоящей работе функция $c(\cdot)$ затрат менеджера предполагается известной[20]. Функция может определяться непосредственно по данным о затратах менеджеров. Кроме того, можно рассматривать некоторые «типичные» функции затрат (например, ниже исследуется степенная функция). При этом подбираются параметры, при которых значения функции в наибольшей степени соответствуют реальным затратам менеджеров.

В базовой модели затраты $c(\cdot)$ менеджера определяются заданными технологическими потоками[21] и функцией $\varphi(\cdot)$. Согласно формулам (2) и (3) внутренние и внешние потоки менеджера зависят только от групп, управляемых его непосредственными подчиненными $v_1,\ldots,v_k$. Таким образом, функция затрат менеджера (4) зависит только от групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$. Функции такого вида названы в работе секционными (строгое определение см. на странице 95). Таким образом, **в базовой модели рассматривается частный случай секционной функции затрат**.

Очевидно, что даже в простейших случаях отыскание оптимальной иерархии методом перебора вариантов требует больших вычислительных затрат (см. пример 1 на странице 32). Данная работа посвящена созданию аналитических методов, которые при определенных ограничениях позволяют найти оптимальную иерар-

[19] При необходимости можно включить в функцию затрат некоторую «норму прибыли», которую необходимо выплатить менеджерам за их работу по управлению.

[20] Затраты могут включать не только зарплату менеджера, но и затраты на организацию его работы – рабочее место, обслуживающий персонал и т.д.

[21] Как сказано во введении, технологические потоки можно определить, например, с помощью метода функционального моделирования.

хию, либо сузить множество иерархий, в котором содержится оптимальная.

1.7. Общий вид оптимальной иерархии

В этом разделе доказано утверждение, которое позволяет отбросить заведомо неоптимальные иерархии. Для доказательства необходима следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть m – некоторый менеджер иерархии H, $v_1,\ldots,v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m. Если $s_H(v_1)\subseteq s_H(v_2)$, то выполнено неравенство*:

$$c(s_H(v_2),\ldots,s_H(v_k))\le c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)),$$

то есть удаление ребра подчиненности (v_1,m) не увеличивает затрат менеджера m.

Если группа $s_H(v_1)$ вложена в группу $s_H(v_2)$, то в силу леммы 4 группу $s_H(v_1)$ можно удалить из аргументов функции без увеличения затрат менеджера m. Это объясняется тем, что сотрудник v_1 не управляет ни одним потоком вне группы $s_H(v_2)$, но может «выносить» на уровень менеджера m часть проблем, связанных с потоками внутри группы $s_H(v_2)$, хотя все эти проблемы уже решает сотрудник v_2. Функция затрат менеджера не зависит от порядка записи $v_1,\ldots,v_k$, поэтому лемма верна для любой пары вложенных групп. Удаление ребра подчинения (v_1,m) не изменит групп, которые подчинены менеджерам иерархии. Поэтому могут измениться лишь затраты менеджера m. Указанное в лемме неравенство гарантирует, что затраты не возрастут. То есть подобные ребра можно удалять без увеличения затрат иерархии. Этот факт позволяет доказать следующее важное утверждение.

Утверждение 1. *Для любой иерархии $H_1\in\Omega(N)$ найдется иерархия $H_2\in\Omega(N)$, имеющая не бóльшие затраты ($c(H_2)\le c(H_1)$), и удовлетворяющая следующим свойствам:*

(i) все сотрудники управляют различными группами исполнителей;

(ii) *только один менеджер не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и все исполнители;*

(iii) *среди сотрудников, непосредственно подчиненных одному менеджеру, ни один не управляет другим.*

Если H_1 – r-иерархия, дерево или r-дерево, то и H_2 будет соответственно r-иерархией, деревом или r-деревом.

Доказательство утверждения основано на последовательном перестроении H_1 без увеличения затрат. В итоге перестроений получаем иерархию H_2, которая удовлетворяет условиям (i)-(iii). Для r-иерархии, дерева и r-дерева перестроения не изменяют вида иерархии.

Утверждение остается верным не только для функции затрат базовой модели, но и для произвольной секционной функции, удовлетворяющей условию леммы 4.

Условие (i) означает отсутствие полного дублирования, при котором два менеджера управляют одной и той же группой исполнителей. На рисунке 6a) приведен пример подобного дублирования. Два менеджера управляют одной и той же группой $\{w_1,w_2,w_3\}$. При этом один них может быть удален, а всем его непосредственным начальникам можно подчинить другого менеджера без увеличения затрат. В частности, из условия (i) следует, что **у любого менеджера имеется не менее двух непосредственных подчиненных** (иначе в силу леммы 1 он управлял бы той же группой, что и его единственный непосредственный подчиненный).

В соответствии с условием (ii) найдется только один менеджер m, который не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все исполнители ($s_{H_2}(m)=N$) и все остальные менеджеры иерархии. Будем называть *m высшим менеджером*.

Условие (ii) соответствует практике построения организаций, при которой только один высший менеджер может принимать решения, обязательные для всех сотрудников (например, может разрешить конфликт между любыми сотрудниками). На рисунке 6b) приведен пример, в котором два менеджера не имеют начальников, то есть нарушается условие (ii). Очевидно, что «лишний» менеджер может быть удален без увеличения затрат иерархии.

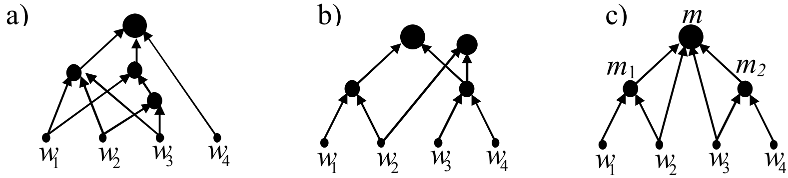

Рисунок 6. Иерархии a)-c) нарушают свойства (i)-(iii) соответственно

Условие (iii) можно интерпретировать следующим образом. Пусть менеджер m_1 непосредственно подчинен менеджеру m. Тогда m непосредственно не управляет подчиненными менеджера m_1. Это соответствует «нормальному» функционированию организации, при котором менеджер управляет всеми подчиненными сотрудниками через непосредственных подчиненных, а не напрямую. На рисунке 6c) приведен пример, в котором высший менеджер m непосредственно управляет исполнителями w_2 и w_3, несмотря на то, что ими уже управляют непосредственные подчиненные m_1 и m_2 менеджера m. Согласно лемме 4 ребра (w_2,m) и (w_3,m) могут быть удалены без увеличения затрат иерархии.

Из утверждения 1 следует, что **найдется оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii)**.[22] Этот факт позволяет в ряде случаев значительно упростить задачу поиска оптимальной иерархии, поскольку можно не рассматривать иерархии, нарушающие хотя бы одно из условий (i)-(iii).

Кроме того, утверждение 1 позволяет доказать следующий факт. **Если существует оптимальная *r*-иерархия, дерево или *r*-дерево, то существует оптимальная иерархия соответствующего вида, удовлетворяющая условиям (i)-(iii).**

[22] Если в качестве H_1 рассмотреть оптимальную иерархию, то по утверждению 1 иерархия H_2 удовлетворяет условиям (i)-(iii) и имеет не бóльшие затраты. Следовательно, H_2 – оптимальная иерархия.

Поэтому все оптимальные иерархии, найденные в данной работе, удовлетворяют условиям (i)-(iii).

1.8. Достаточное условие оптимальности двухуровневой иерархии

Рассмотрим условие, при котором простейшая двухуровневая иерархия оптимальна в рамках базовой модели.

Утверждение 2. *Пусть функция затрат* $\varphi(\cdot)$ *субаддитивна, то есть для всех* $x, y \in R_+^p$ *выполнено неравенство* $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$. *Тогда оптимальна двухуровневая иерархия.*

Условие субаддитивности означает, что затраты $\varphi(x+y)$ одного менеджера на управление суммарным потоком $x+y$ не больше, чем затраты двух менеджеров на управление частями этого потока x и y. В этом случае оптимальна простейшая двухуровневая иерархия, в которой все потоки управляются одним менеджером. Затраты этого менеджера не больше, чем суммарные затраты менеджеров в любой иерархии.[23]

Лемма 5. *Для однокомпонентных потоков* ($p=1$) *вогнутая функция затрат* $\varphi(\cdot)$ *субаддитивна.*

Из леммы 5 и утверждения 2 следует, что **вогнутость функции затрат влечет оптимальность двухуровневой иерархии**, если все потоки технологической сети однотипны (то есть вектор потока содержит одну компоненту).

В случае потоков разного типа это утверждение неверно. Ниже для вогнутой функции затрат приведен пример оптимальной иерархии, в которой для потока каждого типа выделяется отдельный менеджер, что сокращает затраты за счет специализации менеджеров (см. пример 3 на странице 36).

[23] В разделе 3.3 свойство субаддитивности обобщено на класс произвольных секционных функций, для которых удается определить условия оптимальности иерархии двух противоположных видов: двухуровневой иерархия с одним менеджером и 2-иерархии с максимальным количеством менеджеров.

В небольших организациях весьма распространены двухуровневые иерархии (так называемые «простые структуры», Mintzberg (1979)). При росте организации единственный менеджер чрезмерно загружен, что вынуждает его принимать на работу «помощников» – переходить к многоуровневой иерархии. Модель позволяет описать этот эффект: в разделе 1.11 для выпуклой функции затрат найден вид оптимальной иерархии, управляющей симметричной производственной линией, и доказано, что в достаточно большой организации оптимальная иерархия будет многоуровневой.

1.9. Примеры

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих базовую модель оптимальной иерархии.

Пример 1. Снижение затрат при множественном подчинении для несимметричной линии. Пусть в несимметричной производственной линии имеется 4 исполнителя и потоки $f(w_{env},w_1)=3$, $f(w_1,w_2)=1$, $f(w_2,w_3)=5$, $f(w_3,w_4)=1$, $f(w_4,w_{env})=3$. Рассмотрим следующую функцию затрат менеджера: $\varphi(x)=x^3$ (x – величина потока менеджера). Оптимальная иерархия для этого примера изображена на рисунке 7. Обозначим ее через H. У менеджера m_1 два непосредственных начальника, то есть в оптимальной иерархии имеет место множественное подчинение.

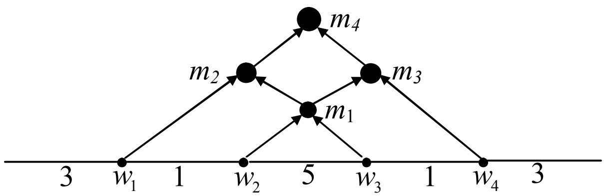

Рисунок 7. Пример оптимальной иерархии, управляющей несимметричной производственной линией

Определим потоки каждого менеджера:

m_1: $c(\{w_2\},\{w_3\})=\varphi[F_H^{\text{int}}(m_1)+(F_H^{ext}(m_1))]=[5+(1+1)]^3=343$;

m_2: $c(\{w_1\},\{w_2,w_3\})=\varphi[F_H^{\text{int}}(m_2)+(F_H^{ext}(m_2))]=[1+(3+1)]^3=125$;

m_3: $c(\{w_4\},\{w_2,w_3\})=\varphi[F_H^{\text{int}}(m_3)+(F_H^{ext}(m_3))]=[1+(1+3)]^3=125$;

m_4: $(\{w_1,w_2,w_3\},\{w_2,w_3,w_4\})=\varphi[F_H^{\text{int}}(m_4)+(F_H^{ext}(m_4))]=[0+(3+3)]^3=216$.

Таким образом, затраты всей иерархии составят:

$c(H)=c(\{w_2\},\{w_3\})+c(\{w_1\},\{w_2,w_3\})+c(\{w_4\},\{w_2,w_3\})+$
$+c(\{w_1,w_2,w_3\},\{w_2,w_3,w_4\})=343+125+125+216=809$.

Убедимся, что найденные затраты являются минимально возможными. Пусть H^* – оптимальная иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii) утверждения 1. В H^* должен быть хотя бы один менеджер m нижнего уровня, которому не подчинены другие менеджеры.

Если m управляет тремя или более исполнителями, то величина потока m не менее 10. Таким образом, затраты m не менее 1000, что больше, чем $c(H)$=809. Следовательно, m управляет ровно двумя исполнителями.

Если m управляет двумя исполнителями, идущими в производственной линии не подряд (например, w_1 и w_3), то $F_{H^*}^{\text{int}}(m)=0$, то есть m не управляет ни одним внутренним потоком, а лишь участвует в управлении внешними. Тогда можно удалить менеджера m, подчинив исполнителей из $s_{H^*}(m)$ непосредственным начальникам m, причем их затраты не изменятся, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, менеджеру m могут быть подчинены только два исполнителя, идущие в линии подряд.

Если менеджеру m подчинены исполнители w_1 и w_2 (или w_3 и w_4), то его затраты составляют 9^3=729. Кроме того, высший менеджер по крайней мере участвует в управлении внешними потоками, следовательно его затраты не менее 6^3=216. То есть в этом случае $c(H^*)>729+216=945$, что противоречит оптимальности H^*. Таким образом, в H^* имеется ровно один менеджер m нижнего уровня. Менеджер m управляет исполнителями w_2 и w_3, то есть наибольшим потоком $f(w_2,w_3)=5$.

Рассматриваемый пример иллюстрирует общее правило: **потоки наибольшей интенсивности должны управляться на**

нижних уровнях иерархии. Это правило отмечается во многих работах по менеджменту на основании опыта исследования реальных организаций (см., например, Mintzberg (1979)). В примере рассмотрен предельный случай, в котором для управления наибольшим потоком специально должен быть выделен менеджер нижнего уровня.

Так как m – единственный менеджер нижнего уровня, то он подчинен всем остальным менеджерам иерархии[24]. Тогда исполнители w_2 и w_3 непосредственно подчинены только менеджеру m, так как иначе нарушается условие (iii) утверждения 1. То есть после назначения менеджера m оптимальная иерархия H^* надстраивается над 3 сотрудниками: w_1, m, w_4. Тогда кроме иерархии H (см. рисунок 7) имеем три варианта иерархии, удовлетворяющие условиям (i)-(iii) утверждения 1. Эти иерархии изображены на рисунке 8.

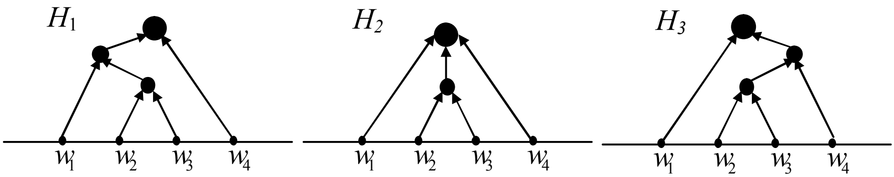

Рисунок 8. Неоптимальные иерархии над несимметричной производственной линией

Легко вычислить, что $c(H_1)=c(H_3)=811$, $c(H_2)=855$. В силу того, что $c(H)=809$ все иерархии на рисунке 8 неоптимальны, следовательно, $H=H^*$ – единственная оптимальная иерархия[25].

Одним из интересных вопросов является оптимальность древовидной иерархии, которая встречается в реальных организациях наиболее часто. Пример 1 показывает, что в некоторых ситуациях ни одно из деревьев не оптимально, то есть **среди деревьев может**

---

[24] Каждому отличному от m менеджеру m' непосредственно подчинен некоторый менеджер m'' (иначе m' – менеджер нижнего уровня, то есть $m'=m$). Если $m''\neq m$, то можно повторить рассуждения. В итоге дойдем до m, то есть докажем его подчиненность менеджеру m'.

[25] Имеются в виду иерархии, удовлетворяющие условиям (i)-(iii) утверждения 1.

не быть оптимальных иерархий. Ниже оптимальность древовидной иерархии доказана для симметричной производственной линии (см. раздел 1.10). Кроме того, в разделе 3.2 найдено достаточное условие оптимальности древовидной иерархии. При этих условиях найти оптимальную иерархию позволяют алгоритмы поиска дерева с минимальными затратами (Воронин и Мишин (2001, 2003)). Кратко эти алгоритмы описаны в разделе 3.2.

Пример 2. Снижение управленческих затрат при росте организации. Рассмотрим несимметричную производственную линию из 4 исполнителей с потоками $f(w_{env},w_1)=1$, $f(w_1,w_2)=5$, $f(w_2,w_3)=1$, $f(w_3,w_4)=5$, $f(w_4,w_{env})=1$ и функцией затрат иерархии $\varphi(x)=x^2$ (x – величина потока менеджера). Сначала предположим, что к организации относятся только исполнители w_2 и w_3, то есть рассмотрим технологическую сеть $N=\{w_2,w_3\}$. Тогда существует только одна иерархия, удовлетворяющая условиям утверждения 1 (страница 28). Эта иерархия изображена на рисунке 9a).

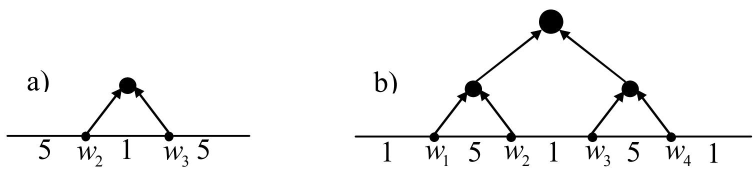

Рисунок 9. Рост организации с одновременным снижением затрат на управление

Предположим, что мы имеем возможность расширить организацию, включив в нее еще двух исполнителей w_1 и w_4. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Например, крупная компания оптовой торговли покупает фирму-производителя товара («исполнителя» w_1) и сеть розничных магазинов («исполнителя» w_4), стремясь управлять всей линией от производства до конечной реализации товаров. Большой поток $f(w_1,w_2)=5$ может соответствовать, например, потоку информации, который связан с проблемами компании при взаимодействии с производителем (скажем из-за большого количества брака). Аналогично, большой поток $f(w_3,w_4)$=5 может быть связан с проблемами взаимодействия с розничной сетью, например с большим числом возвратов товара покупателями.

Таким образом, после расширения организация будет управлять технологической сетью $N=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$. При этом имеется возможность перестроить иерархию управления так, как показано на рисунке 9b). То есть нанять двух менеджеров нижнего уровня, которые будут ответственны за управление большими потоками. Сравним затраты иерархий:

a) $(5+1+5)^2=121$,

b) $(1+5+1)^2+(1+5+1)^2+(1+1+1)^2=49+49+9=107$.

Таким образом, затраты на управление могут снизиться при расширении технологической сети (включении новых исполнителей – части внешней среды). Это может служить одной из причин покупки нового бизнеса, который неприбылен сам по себе, но позволяет снизить расходы на управление основным бизнесом. На практике имеется множество подобных фактов. Например, в России в 90-х годах многие заводы пищевой промышленности трансформировались в вертикально интегрированные агропромышленные компании после покупки сельхозпредприятий своего региона, которые не были прибыльными, но позволяли обеспечить бесперебойную поставку дешевого сырья (см., например, Верхайм и Храмова (1997)).

Пример 3. Многокомпонентные потоки. В силу леммы 5 и утверждения 2 двухуровневая иерархия оптимальна при вогнутой функции затрат и однокомпонентных потоках. Покажем, что для многомерных потоков это не так. Рассмотрим двухкомпонентный поток (p=2). Первая компонента соответствует материальным потокам, вторая – информационным. Предположим, что $N=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ и технологическая сеть выглядит так, как показано на рисунке 10.

Исполнитель w_1 получает сырье, выполняет технологическую операцию и передает полуфабрикаты исполнителю w_2, который производит сборку готового продукта и его отгрузку клиенту. Величина потока может, например, соответствовать количеству наименований передаваемых материалов. Исполнитель w_1 получает сырье одного типа и производит из него три типа деталей. Исполнитель w_2 получает эти детали, собирает их и отгружает один тип продукта. Таким образом, внутренний поток $f(w_1,w_2)$ превосходит внешние потоки $f(w_{env},w_1)$ и $f(w_2,w_{env})$.

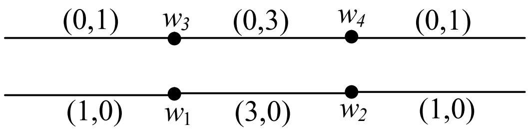

Рисунок 10. Пример технологической сети с двухкомпонентными потоками

Исполнитель w_4 ведет переговоры с заказчиками, готовит и заключает договора поставки продукции, учитывает оплату и отгрузку продукции и т.п.

Данные о необходимом объеме производства исполнитель w_4 передает исполнителю w_3. На основании полученных данных исполнитель w_3 размещает заказы сырья, ведет учет его поступления, обеспечивает расчеты и т.п. Также исполнитель w_3 может передавать исполнителю w_4 информацию, необходимую для расчета стоимости и срока выполнения заказа.

Внутренний поток информации $f(w_3,w_4)$ может превышать внешние потоки $f(w_{env},w_3)$ и $f(w_4,w_{env})$, например, за счет большого количества внутренних документов.

Предположим, что функция затрат менеджера имеет вид $\varphi(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}$, где (x,y) – вектор потока менеджера. Функция вогнута. Это может соответствовать ситуации, в которой менеджеры не сильно загружены и увеличение управляемого потока снижает затраты на единицу потока. Слагаемое $\sqrt{xy}$ может соответствовать специализации менеджеров. Оно равно нулю, если менеджер управляет только потоком одного типа, например производством или документооборотом. В этом случае менеджер становится специалистом в соответствующей области и может управлять потоком с минимальными затратами. Если же менеджер вынужден управлять потоками обоих типов, то его затраты повышаются за счет снижения специализации.

На рисунке 11a) изображена двухуровневая иерархия H_1. В ней поток единственного менеджера равен (5,5), то есть затраты иерархии равны $c(H_1) = \varphi(5{,}5) = 2\sqrt{5} + 5$.

Рассмотрим иерархию H_2 с тремя менеджерами, которая изображена на рисунке 11b). Менеджер m_1 управляет только производством, то есть исполнителями w_1 и w_2. Поток менеджера m_1 равен (5,0). Затраты менеджера m_1 равны $\varphi(5{,}0) = \sqrt{5}$. Аналогично, менеджер m_2 управляет только документооборотом, то есть исполнителями w_3 и w_4. Поток менеджера m_2 равен (0,5). Затраты менеджера m_2 равны $\varphi(0{,}5) = \sqrt{5}$. Высшему менеджеру m_3 подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджер m_3 не вникает в детали потоков внутри технологической сети, а лишь участвует в управлении потоками между технологической сетью и внешней средой, то есть взаимоотношениями с клиентами и поставщиками. Затраты менеджера m_3 равны $\varphi(2{,}2) = 2\sqrt{2} + 2$. Таким образом, $c(H_2) = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2$.

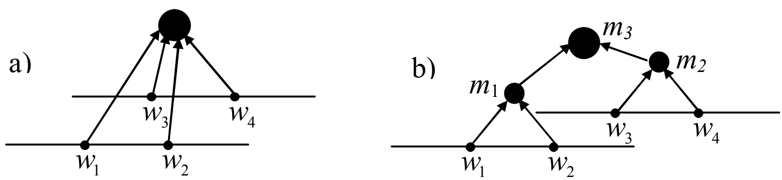

Рисунок 11. a) – неоптимальная двухуровневая иерархия,
b) – иерархия со специализированными менеджерами m_1 и m_2

В итоге имеем $c(H_2) < c(H_1)$, то есть **при многокомпонентных потоках за счет назначения нескольких специализированных менеджеров можно снизить затраты иерархии даже в случае вогнутой функции затрат**.

Рассмотренные примеры показывают, что в рамках построенной модели можно описывать эффекты, имеющие место в реальных организациях. Однако примеры также показывают сложность задачи об оптимальной иерархии. В рамках базовой модели мы решим ее лишь для частного случая – симметричной производственной линии[26].

1.10. Оптимальная иерархия, управляющая симметричной линией

Рассмотрим задачу надстройки оптимальной иерархии над симметричной производственной линией (см. рисунок 1 на странице 16), которая является простейшей технологической сетью. Вдоль линии движется некоторый поток. Например, первый исполнитель получает сырье, обрабатывает и передает полуфабрикат второму исполнителю. Аналогичным образом материальный поток движется далее вплоть до последнего исполнителя, который отгружает готовую продукцию. Сопутствующие информационные и прочие типы потоков также можно учитывать, рассматривая многокомпонентный поток ($p>1$).

Симметричная производственная линия накладывает на технологическую сеть два важных ограничения:

1. Потоки обрабатываются последовательно. То есть каждый исполнитель взаимодействует только с предыдущим и со следующим исполнителем в линии.

2. Величина потока между всеми исполнителями одинакова, то есть интенсивность взаимодействия не меняется на протяжении всей линии.

Очевидно, что на практике условия 1 и 2 могут нарушаться. Могут существовать различные технологические маршруты, некачественная продукция может возвращаться на доработку, интенсивность потоков может возрастать и снижаться (например, учесть заготовку одного типа в начале линии может быть гораздо проще, чем десятки различных деталей, образующихся в результате обработки). Однако в некоторых случаях технологическая сеть может быть близка к симметричной линии. Такой вид сети позволяет

[26] Этот результат понадобится ниже в главе 2. Методы оптимизации иерархии в более сложных случаях в рамках базовой модели не разрабатываются, поскольку подобные методы изложены в главе 3 для обобщенной модели с произвольной секционной функцией затрат.

найти оптимальную иерархию. Если технологическая сеть значительно сложнее симметричной линии, то для поиска оптимальной иерархии могут быть использованы общие методы, описанные в главе 3.

Итак, считаем, что исполнители $N=\{w_1,...,w_n\}$ связаны следующей технологической сетью:

$$f(w_{env},w_1)=\lambda\,,\ f(w_{i-1},w_i)=\lambda \text{ для всех } 2\le i\le n\,,\ f(w_n,w_{env})=\lambda\,.$$

Утверждение 3. *Существует оптимальное дерево H, управляющее симметричной производственной линией, и обладающее следующими свойствами*:

1. затраты H не превышают суммарных затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками внутри линии[27];

2. в H каждый менеджер управляет группой исполнителей, идущих в линии последовательно;

3. если функция затрат выпуклая, то у различных менеджеров H количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу.

В соответствии с этим утверждением, **при поиске оптимальной иерархии можно не рассматривать недревовидные иерархии, ограничиваясь классом деревьев**. В то же время приведенный выше пример 1 показывает, что это утверждение не верно для несимметричной линии.

Поясним свойство 1 утверждения 3. Заметим, что менеджеры любой иерархии из $\Omega(N)$ управляют всеми потоками внутри любой технологической сети. Однако управлять всеми потоками могут также менеджеры графа, состоящего из нескольких иерархий, каждая из которых управляет частью производственной линии. Например, на рисунке 12 изображена структура без централизованного управления. В ней менеджеры m_1 и m_2 управляют различными частями линии, однако над m_1 и m_2 нет общего начальника. Подобные структуры без централизованного управления редко

[27] То есть затраты *H* не больше затрат менеджеров, управляющих всеми потоками, даже если эти менеджеры не объединены в единую иерархию (даже если отсутствует высший менеджер, которому подчинены все исполнители).

используются на практике, поскольку в них нет единого менеджера, уполномоченного принимать решения, обязательные для всей организации[28].

Согласно утверждению 3 затраты дерева H не превышают затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии. Таким образом **затраты оптимального дерева, управляющего симметричной производственной линией, не превышают затрат любой структуры без централизованного управления**.

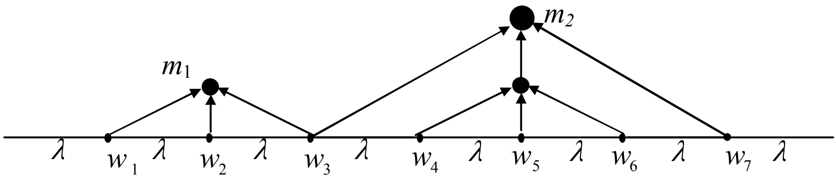

Рисунок 12. Структура без централизованного управления

Иначе говоря, для симметричной производственной линии минимизирует затраты именно иерархия, в которой по определению 1 имеется централизованное управление[29].

В силу свойства 2 утверждения 3 можно рассматривать только такие деревья, в которых каждому менеджеру подчинена группа из исполнителей, идущих подряд. То есть можно не рассматривать иерархии, в которых некоторому менеджеру подчинена, например, группа $\{w_1,w_2,w_4\}$. Если на рисунке 13 менеджеру m_1 вместо исполнителя w_3 подчинить исполнителя w_4, а менеджеру m_2 вместо исполнителя w_4 подчинить исполнителя w_3, то получим следующие результаты:

1. Затраты менеджеров m_1 и m_2 возрастут.

2. Менеджер m_1 перестанет управлять потоком $f(w_2,w_3)$, а будет лишь участвовать в управлении[30]. Менеджер m_2 перестанет

---

[28] Под централизованным управлением подразумевается не сосредоточение властных полномочий у одного менеджера, а лишь наличие менеджера, который управляет всеми сотрудниками организации.

[29] Это утверждение использовано ниже в главе 2 при построении оптимальной иерархии управляющей несколькими производственными линиями с функциональными связями.

управлять потоком $f(w_4,w_5)$, а будет лишь участвовать в управлении. В результате поток, управляемый вышестоящим менеджером m_3, возрастет на $f(w_2,w_3)+f(w_4,w_5)$. Следовательно, возрастут затраты менеджера m_3.

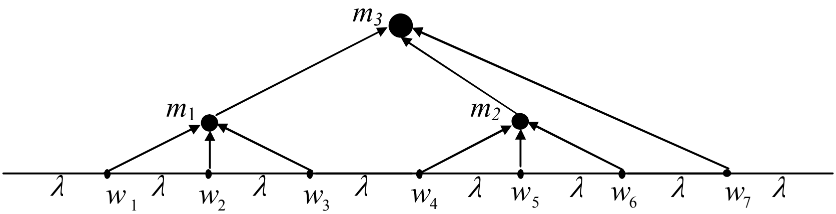

Рисунок 13. Пример иерархии над симметричной производственной линией

Пример иллюстрирует результат утверждения 3 – подчинение менеджеру группы исполнителей, которые идут в линии не подряд, увеличивает затраты всей иерархии. Содержательная интерпретация этого свойства очевидна. **Каждый менеджер должен управлять одним *участком производственной линии*, то есть последовательно идущими исполнителями**. Попытка подчинить менеджеру несвязанные части производства увеличит затраты иерархии и приведет к ее неоптимальности.

Рассмотрим рисунок 13. Менеджеру m_1 подчинена группа $\{w_1,w_2,w_3\}$ из трех исполнителей. В группу $\{w_1,w_2,w_3\}$ входит поток $f(w_{env},w_1)$ из внешней среды и выходит поток $f(w_3,w_4)$. То есть после назначения менеджера m_1 он с точки зрения затрат вышестоящих менеджеров ничем не отличается от исполнителя. Фактически, подчинив менеджеру m_1 трех исполнителей, мы «сократим» длину производственной линии на два, поскольку три исполнителя заменятся на одного менеджера. Менеджер m_2 снова «сократит» число звеньев производственной линии на два. При этом менеджеру m_2 можно было бы подчинить менеджера m_1 и двух исполнителей, что привело бы к тем же затратам. Однако подобное подчинение приведет к росту числа уровней иерархии, поэтому предпочтительнее вариант, изображенный на рисунке 13.

[30] То есть этот поток станет для менеджера внешним.

Если в дереве H у менеджера m имеется k непосредственных подчиненных, то группа $s_H(m)$ разбивается на k подгрупп. Таким образом, некоторый участок производственной линии разбивается на k подучастков. Тогда менеджер m управляет k–1 внутренним потоком и участвует в управлении двумя внешними потоками. Следовательно, **если в дереве любой менеджер управляет исполнителями, идущими в линии подряд, то затраты менеджера с *k* непосредственными подчиненными определяются формулой**:

$$\varphi((k+1)\lambda)\,. \tag{6}$$

Подчинив менеджеру m_1 некоторое количество r_1 исполнителей, мы фактически сократим число элементов производственной линии на $r_1 - 1$ (r_1 исполнителей заменятся на одного менеджера). Аналогично, можно назначить менеджера m_2, подчинив ему r_2 еще не подчиненных исполнителей или менеджеров, и т. д. В итоге должен остаться единственный неподчиненный менеджер m_q.[31] То есть $n-(r_1-1)-(r_2-1)-\ldots-(r_q-1)=1$. Переписывая данное равенство, получим следующее ограничение на количество непосредственных подчиненных всех менеджеров дерева:

$$r_1+\ldots+r_q=n+q-1. \tag{7}$$

По формуле (6) затраты менеджеров равны $\varphi((r_1+1)\lambda),\ldots,\varphi((r_q+1)\lambda)$. Для решения задачи об оптимальной иерархии осталось решить следующую задачу оптимизации:

$$\varphi((r_1+1)\lambda)+\ldots+\varphi((r_q+1)\lambda)\to\min\,, \tag{8}$$

при условиях (7), $r_1,\ldots,r_q \ge 2$, $1 \le q \le n-1$.

Итак, **для симметричной производственной линии задача об оптимальной иерархии сводится к задаче (8) условной оптимизации функции, зависящей от *q* целочисленных переменных** (такую задачу необходимо решить при каждом q). Для решения задачи (8) можно использовать классические методы дискретной оптимизации или предложенные в работе Воронина, Мишина

[31] Напомним, что q – общее количество менеджеров.

(2001, 2003) алгоритмы поиска оптимальных деревьев для произвольной секционной функции[32].

В соответствии с утверждением 3 для выпуклых функций задача (8) решается аналитически. В оптимальном дереве у различных менеджеров количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу, то есть величины $r_1,\ldots,r_q$ отличаются не более чем на единицу[33]. Пусть r – минимальное количество непосредственных подчиненных менеджера. Тогда у любого менеджера либо r, либо r+1 непосредственных подчиненный. Пусть $q_1>0$ – количество менеджеров первого типа (с r непосредственными подчиненными). Тогда $q_2=q-q_1$ – количество менеджеров второго типа (с r+1 непосредственными подчиненными). Левая часть выражения (7) имеет вид $q_1 r + q_2(r+1) = qr + q_2$. То есть выполнено:

$$qr + q_2 = n + q - 1,\ r = \lfloor (n+q-1)/q \rfloor.^{34} \qquad (9)$$

Если n–1 делится на q нацело, то q_2=0 и у всех менеджеров одинаковое количество $r=(n+q-1)/q$ непосредственных подчиненных. Иначе согласно (9) r – ближайшее снизу целое число, а q_2 – остаток от деления n–1 на q.

Таким образом, в случае выпуклой функции при фиксированном q из формулы (9) определяются параметры $r_1,\ldots,r_q$ и по формуле (8) вычисляются затраты дерева. Поэтому для решения задачи об оптимальной иерархии остается лишь найти оптимальное количество менеджеров $1 \le q \le n-1$. Это можно сделать с помощью сравнения n–1 варианта. Иначе говоря, **для любой выпуклой функции можно найти оптимальною иерархию над симметричной производственной линией путем сравнения затрат *n*–1 дерева**. Вариант q=1 соответствует двухуровневой иерархии с максимальным числом непосредственных подчиненных

---

[32] Кратко эти алгоритмы упоминаются в разделе 3.2.

[33] Если имеются значения отличаются на два и более, то в соответствии с доказательством утверждения 3 одно можно уменьшить, а другое увеличить, без увеличения затрат дерева.

[34] Символ $\lfloor (n+q-1)/q \rfloor$ обозначает нижнюю целую часть, то есть максимальное целое число, не превышающее $(n+q-1)/q$.

r=n. Вариант q=n–1 соответствует 2-иерархии с минимальным числом непосредственных подчиненных r=2.

В следующем разделе рассмотрен важный частный случай – степенная функция затрат, для которой задача решена аналитически (для нее существует оптимальная норма управляемости, которая не зависит от n и λ).

1.11. Оптимальная норма управляемости для степенной функции затрат и симметричной линии

В экономико-математических моделях часто используются степенные функции затрат. Один из наиболее распространенных примеров – квадратичная функция. Ниже в данном разделе и в главе 2 подробно исследован вид оптимальной иерархии для степенной функции затрат, зависящей от потоков менеджера.

Рассмотрим симметричную производственную линию (см. рисунок 1) с одномерными потоками. Интенсивность потоков в линии определяется неотрицательной величиной $\lambda \geq 0$ (например, интенсивностью материального потока). Тогда можно рассмотреть *степенную функцию затрат менеджера*:

$$\varphi(x) = x^{\alpha}, \tag{10}$$

где x – сумма потоков менеджера[35], $\alpha \geq 0$ – показатель степени.

Мы будем интерпретировать показатель степени α как *нестабильность внешней среды*.

Приведем пример влияния нестабильности на затраты менеджера. Предположим, что в стабильной внешней среде организация выпускает единственную модификацию продукта[36]. При нестабильном спросе может потребоваться выпуск нескольких модификаций продукта, причем требования к выпускаемым модификациям могут постоянно изменяться. Пусть количество требуемых модификаций равно нестабильности внешней среды α. Суммарный

[35] Например, если менеджер управляет и участвует в управлении k потоками, то $x = k\lambda$.

[36] Например, для получения максимальной прибыли при ограниченной мощности производства.

поток x менеджера может соответствовать количеству деталей, производством которых управляет менеджер. Менеджер должен решить, какое количество деталей использовать для выпуска каждой из модификаций, то есть определить, что для выпуска первой модификации используется $0 \le x_1 \le x$ деталей, для выпуска второй – $0 \le x_2 \le x$ деталей и т.д. Порядок роста общего количества вариантов выбора $x_1, \ldots, x_\alpha$ равен $x^{\alpha-1}$.[37] Для анализа каждого варианта может потребоваться, например, расчет себестоимости выпуска каждой из x деталей с учетом технологических ограничений[38]. Таким образом, трудоемкость выбора наилучшего варианта производства может возрастать[39] как x^α, что и определяет затраты менеджера.

Приведенный пример иллюстрирует, что затраты менеджера можно моделировать с помощью зависимости (10), в которой показатель степени α соответствует нестабильности внешней среды. В примере показатель α равен числу модификаций, появляющихся из-за нестабильности спроса. В реальной ситуации показатель α может быть меньше, поскольку с точки зрения затрат менеджера между большинством модификаций может не быть разницы. Кроме того, на затраты менеджера могут влиять прочие факторы нестабильности («текучесть» кадров, изменение качества сырья, состава поставщиков и т.п.). Поэтому мы будем считать, что имеется некоторый обобщенный показатель нестабильности внешней среды – действительное число $\alpha > 1$, при котором затраты менед-

---

[37] Например, при $\alpha = 2$ имеется x+1 вариант выбора величины x_1, после чего величина x_2 определяется из соотношения x_1+x_2=x. При $\alpha = 3$ количество вариантов равно $x^2/2 + 3x/2 + 1$, то есть порядок роста опять равен $x^{\alpha-1}$, и так далее.

[38] Например, детали одной модификации могут выпускаться не по одиночке, а партиями. При выпуске количества деталей не кратного размеру партии себестоимость возрастает, что снижает прибыль. Поэтому на выбор «наилучшего» варианта могут влиять разнообразные технологические факторы.

[39] При наступлении очередного периода планирования (например, месяца) от менеджера может потребоваться управление выпуском таких модификаций, с которыми он ранее не сталкивался. Поэтому менеджеру может быть неизвестен наилучший вариант или простые методы его поиска, что приводит к необходимости анализа всех вариантов.

жера определяются формулой (10).[40] Значения $\alpha \le 1$ будут соответствовать ситуациям стабильной внешней среды.

Таким образом, в стабильной внешней среде при $\alpha = 1$ затраты менеджера растут линейно при росте управляемого им потока (каждая дополнительная единица потока требует одних и тех же затрат). При $\alpha > 1$ нестабильность приводит к тому, что функция затрат становится выпуклой (каждая дополнительная единица потока требует все б*о*льших затрат).

При $\alpha \le 1$ функция затрат (10) вогнута. Таким образом, по утверждению 2 и лемме 5 в стабильной внешней среде оптимальна двухуровневая иерархия (все исполнители непосредственно подчинены единственному менеджеру).

Найдем оптимальную иерархию, управляющую симметричной производственной линией в нестабильной внешней среде.

Будем рассматривать только деревья, в которых у всех менеджеров число непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу, и каждый менеджер управляет одним участком производственной линии. Степенная функция затрат выпукла при $\alpha > 1$, то есть в силу утверждения 3 среди таких деревьев найдется оптимальная иерархия.

Если у некоторого менеджера дерева имеется r непосредственных подчиненных, то в силу формулы (6) затраты этого менеджера, определяемые степенной функцией, равны:

$$\varphi((r+1)\lambda) = (r+1)^{\alpha}\lambda^{\alpha}. \tag{11}$$

Если n–1 делится нацело на количество q менеджеров оптимального дерева, то согласно (9) у каждого менеджера будет ровно $r = 1 + (n-1)/q$ непосредственных подчиненных. В этом случае затраты менеджеров дерева будут равны:

---

[40] То есть будем считать, что повышение нестабильности приводит к росту α и наоборот. На показатель степени α может также влиять множество других факторов (например, личные качества менеджера или рассматриваемые в менеджменте факторы «сложности», «враждебности» внешней среды). Однако мы будем интерпретировать показатель α как нестабильность внешней среды.

$$(r+1)^{\alpha}\lambda^{\alpha}(n-1)/(r-1)\,, \tag{12}$$

где $(n–1)/(r–1)$ – количество менеджеров.

Вид формулы (12) позволяет предположить, что оптимальную иерархию можно найти с помощью выбора оптимальной нормы управляемости r_*, которая минимизирует $(r+1)^{\alpha}/(r-1)$. Следующее утверждение подтверждает это предположение.

Утверждение 4. *Для симметричной производственной линии с одномерными потоками и степенной функции затрат при* $\alpha > 1$ *оптимальная норма управляемости* r_* *равна одному из двух целых чисел ближайших к* $(\alpha+1)/(\alpha-1)$.

Если $n-1$ *делится нацело на* r_*-1*, то оптимально* r_**-дерево* H^**, в котором каждый менеджер управляет одним участком линии и имеет ровно* r_* *непосредственных подчиненных. Затраты* H^* *определяются формулой* (12) *с* $r = r_*$. *При произвольном n формула* (12) *дает нижнюю оценку затрат на управление всеми потоками линии.*

В доказательстве утверждения показано, что норма управляемости $r_0 = (\alpha+1)/(\alpha-1)$ доставляет минимум функции $\xi(r) = (r+1)^{\alpha}/(r-1)$. Однако величина r_0 может не быть целым числом. Поэтому r_* равно ближайшему снизу целому значению $r_- = \lfloor r_0 \rfloor$ или ближайшему сверху целому значению $r_+ = \lceil r_0 \rceil$ в зависимости от того, какое значение минимизирует функцию $\xi(r)$.Таким образом, утверждение 4 определяет *оптимальную норму управляемости* следующим образом:

$$r_* = \begin{cases} r_-, \text{при}\, \xi(r_-) < \xi(r_+), \\ r_+, \text{при}\, \xi(r_+) \le \xi(r_-). \end{cases} \tag{13}$$

В силу утверждения 4 оптимальной иерархией, управляющей симметричной производственной линией, будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. То есть **оптимальна иерархия с нормой управляемости** r_*. При этом необходимо, чтобы подобное дерево существовало, то есть чтобы $n-1$ делилось нацело на r_*-1. Например, при $r_*=3$ возможны следующие значения $n=3,5,7,9...$. Оптимальное дерево при n=7 изображено на рисунке 13. Если выполнено $n=(r_*)^j$, то можно построить оптимальное дерево с j+1 уровнями иерархии, в котором каждому менеджеру второго уровня подчинено r_* исполнителей, каждому менеджеру следующего уровня подчинено ровно r_* менеджеров предыдущего уровня. Для $r_*=3$ и n = 9 такое дерево приведено на рисунке 14.

Если n –1 не делится нацело на r_*–1, то не существует дерева, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Тогда по утверждению 4 при любом n затраты оптимальной иерархии не могут ниже, чем:

$$(n-1)\lambda^{\alpha}(r_*+1)^{\alpha}/(r_*-1). \tag{14}$$

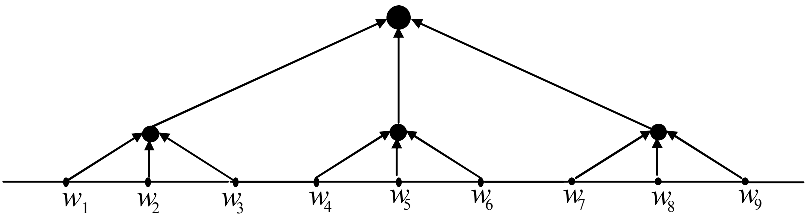

Рисунок 14. Пример дерева над производственной линией

Кроме того, по утверждению 3 затраты оптимальной иерархии не больше суммарных затрат любой структуры, управляющей всеми потоками, даже если эта структура не имеет централизованного управления. Поэтому **затраты любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии, не меньше величины, определяемой формулой (14)**.

Если $n-1$ делится нацело на r_*-1, то достигается нижняя оценка (14) затрат оптимальной иерархии. При этом в иерархии имеется $q=(n-1)/(r_*-1)$ менеджеров, каждый из которых управляет ровно r_* непосредственными подчиненными. Если n произвольно, то оптимальное количество менеджеров в дереве может быть одним из двух целых чисел, ближайших к $(n-1)/(r_*-1)$. При этом количество непосредственных подчиненных в оптимальном дереве определяется формулой (9). Затраты оптимального дерева при произвольном n не могут превышать оценку (14) более, чем в $1+(r_*-1)/(n-1)$ раз[41]. При достаточно большом n отклонение от оценки (14) незначительно. Поэтому **ниже рассматриваются только значения $n-1$ кратные r_*-1, то есть считается, что затраты оптимальной иерархии определяются формулой (14)**.

Формула (13) определяет зависимость оптимальной нормы управляемости $r_*(\alpha)$ от нестабильности внешней среды α. Эта зависимость изображена на рисунке 15. Кроме $r_*(\alpha)$ на рисунке приведена кривая $(\alpha+1)/(\alpha-1)$.

Из рисунка 15 видно, что **при росте нестабильности внешней среды оптимальная норма управляемости снижается**. Эта закономерность часто наблюдается на практике и описана в работах по менеджменту (см., например, Mintzberg (1979)).

Когда среда становится стабильной (α приближается к единице), оптимальная норма управляемости стремится к $+\infty$, то есть оптимально подчинять одному менеджеру все большее количество сотрудников. В частности, двухуровневая иерархия становится оптимальной для все б*о*льших значений n, то есть для организаций все большего размера. В пределе этот результат переходит в результат для стабильной внешней среды, при которой двухуровневая иерархия с одним менеджером оптимальна при любом размере организации. **Однако, даже при наличии малой нестабильности ($\alpha>1$) для организации достаточно большого размера оптимальна многоуровневая иерархия**.

[41] Можно оценить затраты дерева сверху, выбирая ближайшее $n_1>n$, при котором n_1-1 делится нацело на r_*-1. Выполнено $n_1-n<r_*-1$, что и дает указанную оценку.

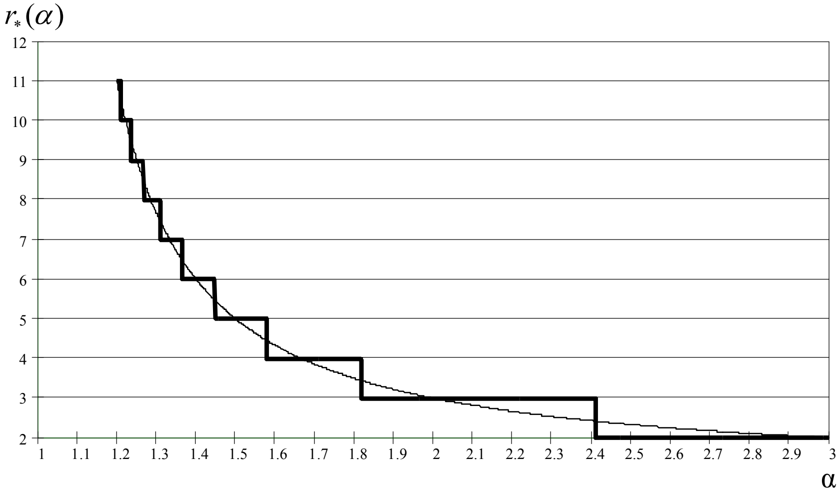

Рисунок 15. Оптимальная норма управляемости $r_*(\alpha)$ в зависимости от нестабильности внешней среды α

Из рисунка 15 видно, что значения $\alpha \geq 2.5$ соответствуют *крайне нестабильной внешней среде*. В таких условиях при любом n оптимальная норма управляемости равна двум. То есть в оптимальном дереве у каждого менеджера всего два непосредственных подчиненных. Общее количество менеджеров будет равно $n-1$, то есть оптимально наибольшее количество менеджеров, каждый из которых управляет единственным внутренним потоком. Итак, в условиях крайней нестабильности для управления каждым потоком оптимально назначить отдельного менеджера.

Как отмечено в работе Mintzberg (1979), в большинстве реальных организаций иерархия представляет собой промежуточный вариант, при котором у каждого менеджера имеется от трех до десяти непосредственных подчиненных. В некоторых случаях число непосредственных подчиненных может доходить до сотен. Таким образом, в модели диапазон нестабильности от 1 до 2.5 ($1 < \alpha < 2.5$) соответствует эффектам, наблюдаемым на практике в реальных организациях. На рисунке 15 приведен пример ступенчатого возрастания оптимальной нормы управляемости при уменьшении α от 2.5 до 1.

При росте организации (увеличении числа исполнителей n) количество менеджеров и затраты оптимальной иерархии (14) растут линейно. Поэтому модель со степенной функцией затрат и изолированной производственной линией не позволяет определить пределы роста организации. Ниже в главе 2 модифицирована базовая модель и найдена оптимальная иерархия для нескольких производственных линий с функциональными связями. Это позволило сделать выводы о необходимости реструктуризации организации при ее росте.

Рассмотрим факторы, влияющие на интенсивность λ потоков, управляемых менеджером. В соответствии с пояснениями раздела 1.5 под управлением может пониматься оперативное планирование и контроль потоков. Mintzberg (1979) называет такие обязанности менеджера *прямым контролем*, который как раз и подразумевает оперативную работу менеджера, необходимую для того, чтобы организация функционировала должным образом.

Однако не все потоки могут требовать прямого контроля со стороны менеджера. Часть потоков не требует вмешательства менеджеров, поскольку исполнители могут справиться с такими потоками самостоятельно. Mintzberg (1979) приводит аргументы, согласно которым в реальных организациях *стандартизация* повышает долю потоков, не требующих вмешательства менеджеров. То есть стандартизация снижает затраты на прямой контроль. Mintzberg выделяет несколько *типов стандартизации*:

1. Стандартизация знаний и навыков. Позволяет исполнителям без участия менеджеров согласованно взаимодействовать в ряде ситуаций за счет того, что имеются общие знания и навыки действий в этих ситуациях.

2. Стандартизация выпуска. Определяет требования к результатам работы каждого исполнителя. Позволяет исполнителям без участия менеджеров разрешать проблемы с несоответствующей продукцией.

3. Стандартизация рабочих процессов. Содержит ряд инструкций, регламентирующих действия исполнителей. Чем больше

вариантов действий регламентировано, тем реже исполнителю приходится обращаться к менеджеру.

Таким образом, все типы стандартизации приводят к уменьшению доли потоков, требующих прямого контроля менеджеров.

В рамках базовой модели стандартизацию можно учесть, рассматривая соответствующую функцию затрат. Например, если обозначить степень стандартизации через $0 \le s \le 1$, то вместо функции затрат $\varphi(x) = x^\alpha$ можно рассмотреть функцию затрат $\varphi(x) = (x(1-s))^\alpha$. Если степень стандартизации нулевая, то в прямом контроле нуждаются все потоки. При полной стандартизации необходимость в прямом контроле отпадает. Однако удобнее считать, что стандартизация меняет не функцию затрат, а интенсивность потоков (все потоки умножаются на $1\text{–}s$). С математической точки зрения это не меняет задачи, однако делает более удобной интерпретацию результатов.

Таким образом, ниже будем считать, что **для симметричной производственной линии интенсивность λ максимальна при отсутствии стандартизации и равна нулю при полной стандартизации,** то есть под λ понимается интенсивность той части потоков, которая требует прямого контроля менеджеров.

Mintzberg (1979) указывает, что в ряде случаев в реальных организациях увеличение стандартизации лишь снижает затраты менеджеров, не изменяя нормы управляемости. Рассмотренная модель со степенной функцией затрат и симметричной производственной линией приводит к тем же результатам. Рост стандартизации приводит к снижению λ, что в силу формулы (14) снижает затраты всех менеджеров иерархии. Однако рост стандартизации не меняет оптимальной нормы управляемости r_* (см. формулу (13)), то есть выводы модели соответствуют эффекту, наблюдаемому на практике.

В целом базовая модель вводит основную терминологию и поясняет рассматриваемую постановку задачи об оптимальной иерархии. Решение задачи для симметричной производственной линии используется в главе 2 для поиска оптимальной иерархии над несколькими производственными линиями с функциональными связями (в этом случае доказывается оптимальность дивизиональной, функциональной или матричной иерархии). Базовая модель и глава 2 показывают, что исследование класса секционных функций[42] весьма важно, поскольку с помощью примеров (зависящей от потоков функции) промоделированы многие эффекты, встречающиеся в экономических системах. В главе 3 исследуется обобщенная модель (рассматриваются произвольные секционные функции затрат).

[42] Напомним, что под секционной понимается функция, в которой затраты менеджера зависят только от групп, которыми управляют непосредственные подчиненные (строгое определение см. на странице 95).

2. Оптимальность функциональной, дивизиональной и матричной иерархий

Как отмечается во многих работах по менеджменту (см., например, Mintzberg (1979)), преимущества дивизиональной, функциональной или матричной иерархии зависят в первую очередь от характера взаимодействия исполнителей, то есть от потоков технологической сети. В соответствии с этим в главе 2 рассмотрена технологическая сеть, состоящая из нескольких производственных линий, связанных функциональными взаимодействиями исполнителей. Такая форма сети позволяет для некоторых функций затрат при любом размере организации доказать оптимальность типичной иерархии: функциональной, дивизиональной или матричной. Кроме того, в рамках построенной модели можно объяснить многие эффекты, имеющие место в практике управления. Например, модель позволяет исследовать зависимость вида оптимальной иерархии от нестабильности внешней среды, стандартизации, интенсивности продуктовых и функциональных потоков, горизонтальной и вертикальной интеграции и т.п.

В разделах 2.1 и 2.2 описывается технологическая сеть, состоящая из функционально связанных технологических линий, и поясняется содержательная интерпретация потоков этой сети. В разделе 2.3 все менеджеры разделены на несколько типов, формально определены понятия дивизиона, департамента и типичных иерархий (дивизиональной, функциональной и матричной). В разделах 2.4-2.6 обсуждается вид и свойства функции затрат. Для этой функции в разделе 2.7 доказана оптимальность одной из типичных иерархий. В разделе 2.8 эти иерархии сравниваются друг с другом, и анализируется зависимость вида оптимальной иерархии от параметров модели.

2.1. Функционально связанные производственные линии. Продуктовые и функциональные потоки

В разделе 1.11 для степенной функции затрат была найдена оптимальная иерархия, управляющая симметричной производственной линией. Воспользуемся этими результатами для решения задачи об оптимальной иерархии, управляющей более сложной технологической сетью, состоящей из нескольких производственных линий с функциональными связями. Ниже описана математическая модель надстройки над этой технологической сетью (см. рисунок 16) дивизиональной, функциональной и матричной иерархий.

Итак, будем считать, что технологическая сеть состоит из l производственных линий ($l \geq 2$). Каждая производственная линия выпускает некоторый продукт (или обслуживает определенный регион, определенных клиентов и т.п.). Для выпуска продукта необходимо последовательное выполнение некоторых технологических операций. Считаем, что операции выполняются n исполнителями, из которых и состоит производственная линия ($n \geq 2$).

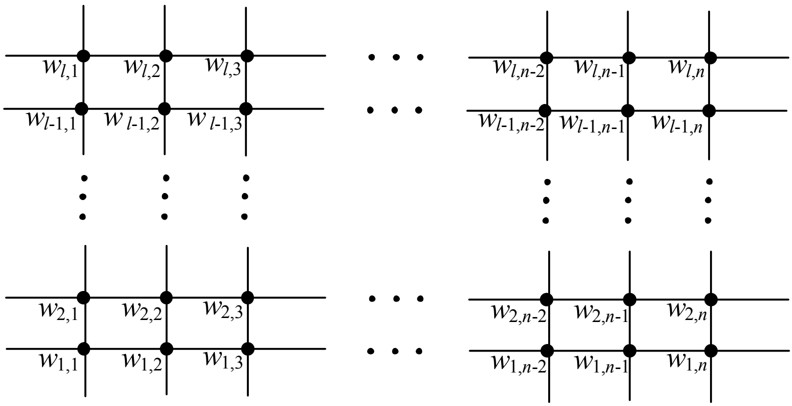

Рисунок 16. Функционально связанные производственные линии (сеть с продуктовыми и функциональными потоками)

В технологической сети множество исполнителей имеет вид $N=\{w_{i,j}\}$, где $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq n$. Индекс i обозначает номер производственной линии, к которой относится исполнитель, индекс j – номер исполнителя в линии (или номер операции, которую он выполняет). Таким образом, множество исполнителей содержит nl

элементов. Каждый исполнитель обозначается двумя нижними индексами, разделенными запятой.

Рассмотрим функционирование производственной линии с номером i. Исполнитель $w_{i,1}$ может, например, поставлять сырье. Полученное сырье он передает следующему за ним в линии исполнителю $w_{i,2}$, который выполняет некоторую технологическую операцию и передает ее результат следующему исполнителю $w_{i,3}$, и так далее. Последний исполнитель $w_{i,n}$ в производственной линии осуществляет реализацию продукции потребителю. Таким образом, считаем, что исполнитель $w_{i,j}$ обменивается *продуктовыми потоками* с соседними по производственной линии исполнителями $w_{i,j-1}$ и $w_{i,j+1}$. Эти потоки позволяют выпустить конечный продукт производственной линии. Первый исполнитель производственной линии, кроме обмена потоком со вторым исполнителем, обменивается продуктовым потоком с внешней средой (например, получает сырье). Аналогично, последний исполнитель производственной линии обменивается продуктовым потоком с внешней средой (например, отгружает продукцию). Предполагаем, что величина потока, проходящего вдоль всех производственных линий, постоянна. То есть, рассматриваем симметричные производственные линии, величина потока в которых одинакова.

Считаем, что исполнители с одинаковым номером выполняют в различных производственных линиях схожую работу. Таким образом, исполнители с одинаковым номером имеют схожую квалификацию, могут использовать одно и то же оборудование и т.п. Например, первые исполнители $w_{1,1}$, $w_{2,1}$,…,$w_{l-1,1}$, $w_{l,1}$ во всех производственных линиях ответственны за снабжение линии сырьем. Эти исполнители должны обладать навыками взаимодействия с поставщиками, оценки предлагаемых условий, выбора наилучших поставщиков и т.п. В связи с этим исполнители с одинаковым номером взаимодействуют друг с другом, обмениваясь потоками (как информационными, так и материальными). Например, снабженец может получать у коллег информацию об изменениях цен на сырье, о появлении сырья нового типа, о том, с каким поставщиком лучше сотрудничать и т.п. При этом считаем, что за подобной информацией снабженец обращается к «ближайшим» коллегам. На рисунке 16 расположение производственных линий может соответствовать, например, территориальному расположению. В этом случае «ближайшими» будут коллеги из соседних производственных линий. Таким образом, считаем, что исполнитель $w_{i,j}$ обменивается *функциональными потоками* с коллегами $w_{i-1,j}$ и $w_{i+1,j}$ из соседних производственных линий. Исполнитель первой линии, кроме обмена с исполнителем второй линии, обменивается функциональным потоком с внешней средой (например, контактирует со специалистами аналогичных организаций). Аналогично, исполнитель последней линии (с номером l) обменивается функциональным потоком с внешней средой. Считаем, что все функциональные потоки имеют одинаковую интенсивность. То есть, по сути, рассматриваются симметричные «*функциональные линии*», величина потока в которых одинакова. Функциональные линии будем нумеровать от 1 до n (первая линия может соответствовать снабжению, последняя – сбыту продукции).

Таким образом, технологическая сеть на рисунке 16 представляет собой *функционально связанные производственные линии*. Линии с производственными и функциональными связями перекрещиваются. Каждый исполнитель принадлежит к одной производственной и одной функциональной линии. Производственная линия может, например, соответствовать материальным потокам, возникающим в процессе выпуска продукта. А функциональная линия – информационным потокам, возникающим при взаимодействии специалистов одного профиля в процессе производства материальных потоков.

Через $N_i=\{w_{i,1},\ldots,w_{i,n}\}$ обозначим i-ю производственную линию. Объединение производственных линий $N_1,\ldots,N_l$ соответствует всему множеству исполнителей: $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$.

Через $N^j=\{w_{1,j},\ldots,w_{l,j}\}$ обозначим j-ю функциональную линию. Объединение функциональных линий $N^1,\ldots,N^n$ соответствует всему множеству исполнителей: $N = N^1 \cup \ldots \cup N^n$.

В следующем разделе определена интенсивность потоков технологической сети.

2.2. Интенсивность продуктовых и функциональных потоков

Как и в базовой модели главы 1, будем считать, что затраты менеджеров зависят от потоков технологической сети. В разделе 1.11 отмечалось, что затраты менеджера соответствуют его обязанностям по «прямому контролю» потоков. При этом стандартизация снижает интенсивность тех потоков, которые нуждаются в прямом контроле. Введем следующие обозначения.

Через $\lambda > 0$ *обозначим интенсивность той части продуктового потока, которая должна управляться менеджером.*

Через $\theta > 0$ *обозначим интенсивность той части функционального потока, которая должна управляться менеджером.*

Считаем, что **стандартизация снижает объем прямого контроля как продуктовых, так и функциональных потоков**. Если стандартизация отсутствует, то прямой контроль менеджеров необходим для всех потоков. В этом случае величины λ и θ максимальны и соответствуют всем потокам, имеющим место в технологической сети. Если стандартизация близка к полной, то необходимость в прямом контроле стремится к нулю, то есть близки к нулю интенсивности потоков λ и θ.

Величины λ и θ обычно взаимосвязаны. Если нарастают продуктовые потоки, то увеличивается и объем функциональных взаимодействий. Это соответствует практическим ситуациям, при которых увеличение объемов производства приводит к росту затрат всех менеджеров, которые управляют как продуктовыми, так и функциональными потоками. Мы не будем вникать в характер связи между интенсивностью продуктовых и функциональных потоков, а исследуем модель при любых значениях λ и θ.

В общем случае и продуктовые и функциональные потоки могут состоять из нескольких компонент, то есть λ и θ могут быть векторами. Например, λ и θ могут состоять из интенсивности материального и интенсивности информационного потока. Однако ниже в главе 2 **будем считать потоки однокомпонентными**. То есть λ и θ – положительные действительные числа.

Таким образом, функция потока $f(\cdot)$ имеет следующий вид. Для всех $1 \le i \le l$ и $1 \le j \le n$ исполнитель $w_{i,j}$ имеет следующие связи:

$$f(w_{i,j-1}, w_{i,j}) = f(w_{i,j}, w_{i,j+1}) = \lambda\,,$$
$$f(w_{i-1,j}, w_{i,j}) = f(w_{i,j}, w_{i+1,j}) = \theta. \qquad (15)$$

Если в формулах (15) индекс j–1 равен нулю или индекс j+1 превышает n, то под «исполнителем» $w_{i,0}$=$w_{i,n+1}$= w_{env}^{prod} понимается та часть внешней среды, с которой исполнители обмениваются продуктовыми потоками. Назовем *внешнюю среду* w_{env}^{prod} *продуктовой*. Аналогично, под «исполнителями» $w_{0,j}$=$w_{l+1,j}$= w_{env}^{func} понимается та часть внешней среды, с которой исполнители обмениваются функциональными потоками. Назовем *внешнюю среду* w_{env}^{func} *функциональной*. Все потоки определяются формулами (15). Других связей в технологической сети нет.

Согласно формулам (15) вдоль производственных линий проходят продуктовые потоки с интенсивностью λ. Вдоль функциональных линий проходят функциональные потоки с интенсивностью θ. На рисунке 17 изображены потоки технологической сети для первой производственной и первой функциональной линии. В остальных линиях потоки аналогичны.

Форма технологической сети (см. рисунок 16) и вид потоков (см. рисунок 17) накладывает весьма сильные ограничения на технологию. Предполагается, что каждая производственная линия содержит одинаковое количество n исполнителей. При этом исполнители разных линий с одинаковым номером имеют схожие обязанности. В реальных организациях могут возникать отклонения от этой модели. Например, один исполнитель может снабжать все линии, производственные линии могут быть различной длины, в некоторых производственных линиях могут быть исполнители, выполняющие уникальную работу, которая отсутствуют в других линиях и т.п. Также возможны ситуации, при которых интенсивность потоков изменяется вдоль продуктовых или функциональных линий. Однако в некоторых случаях технологическая сеть может быть близка к функционально связанным производственным линиям. Такой вид сети позволяет в ряде случаев исследовать задачу аналитически. Если технологическая сеть значительно более сложна, то для поиска оптимальной иерархии могут быть использованы общие методы, описанные в главе 3.

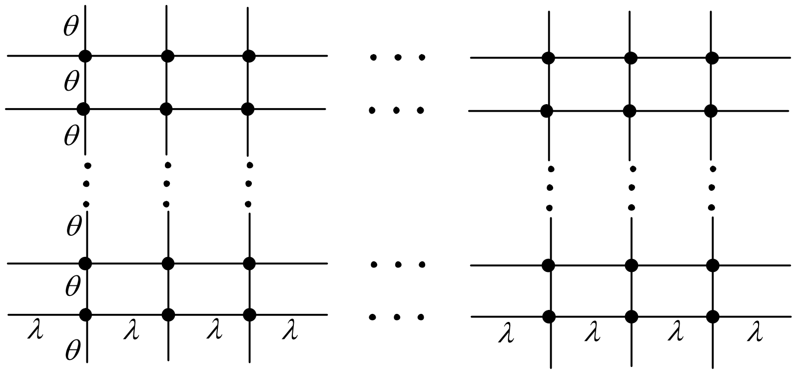

Рисунок 17. Интенсивность продуктовых и функциональных потоков в первой производственной и функциональной линиях

Описанная технологическая сеть позволяет определить дивизиональную, функциональную и матричную иерархии (см. следующий раздел).

2.3. Дивизионы и департаменты. Типичные иерархии

Каждый менеджер иерархии управляет определенной частью технологической сети. Исходя из этого, определим несколько типов менеджеров.

Дивизиональным менеджером назовем менеджера, который управляет исполнителями только одной производственной линии. Если дивизиональный менеджер m управляет всеми исполнителями производственной линии, то менеджера m назовем *начальником дивизиона*, менеджера m и всех подчиненных ему сотрудников назовем *дивизионом*.

Считаем, что номер дивизиона совпадает с номером входящей в него производственной линии. Если в иерархии нет менеджера, управляющего всей производственной линией, то будем считать, что в иерархии отсутствует дивизион с соответствующим номером (даже если дивизиональные менеджеры управляют частями производственной линии).

Если m – дивизиональный менеджер, то выполнено $s(m) \subseteq N_i$, где $1 \le i \le l$ – номер производственной линии, $s(m)$ – группа исполнителей, управляемая менеджером m. Если менеджеру m подчинен некоторый менеджер m_1, то выполнено $s(m_1) \subset s(m)$ (см. лемму 1). То есть дивизиональному менеджеру могут быть подчинены только другие дивизиональные менеджеры или исполнители.

Аналогичным образом можно определить типы менеджеров, управляющих исполнителями функциональных линий.

Функциональным менеджером назовем менеджера, который управляет исполнителями только одной функциональной линии. Если функциональный менеджер m управляет всеми исполнителями функциональной линии, то менеджера m назовем *начальником департамента*, менеджера m и всех подчиненных ему сотрудников назовем *департаментом.*

Считаем, что номер департамента совпадает с номером входящей в него функциональной линии. Если в иерархии нет менеджера, управляющего всей функциональной линией, то будем считать, что в иерархии отсутствует департамент с соответствующим номером (даже если функциональные менеджеры управляют частями функциональной линии).

Если m – функциональный менеджер, то выполнено $s(m) \subseteq N^j$, где $1 \le j \le n$ – номер функциональной линии. Если менеджеру m подчинен некоторый менеджер m_1, то выполнено $s(m_1) \subset s(m)$ (см. лемму 1). То есть функциональному менеджеру могут быть подчинены только другие функциональные менеджеры или исполнители.

Дивизиональных и функциональных менеджеров назовем *менеджерами среднего звена*. Кроме того, определим два типа *стратегических менеджеров*:

1. *Менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов*, назовем менеджера, каждый непосредственный подчиненный

которого управляет одной производственной линией (является начальником дивизиона) или несколькими производственными линиями.

2. *Менеджером, управляющим взаимодействием департаментов*, назовем менеджера, каждый непосредственный подчиненный которого управляет одной функциональной линией (является начальником департамента) или несколькими функциональными линиями.

Рассмотрим технологическую сеть N, состоящую из функционально связанных производственных линий.

Дивизиональной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из l дивизионов и стратегических менеджеров, управляющих их взаимодействием.

Функциональной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из n департаментов и стратегических менеджеров, управляющих их взаимодействием.

Матричной иерархией назовем иерархию из $\Omega(N)$, которая состоит из l дивизионов, n департаментов и высшего менеджера, которому непосредственно подчинены начальники дивизионов и департаментов.

Рассмотрим пример. Пусть l =3 и n =9, то есть имеются три производственные линии, каждая из которых содержит девять исполнителей. Таким образом, имеется девять функциональных линий.

На рисунке 18 изображен пример дивизиональной 3-иерархии. В иерархии созданы три дивизиона, каждый из которых управляет одной производственной линией (выпуском одного продукта). Каждый дивизион состоит из начальника, трех непосредственно подчиненных ему дивизиональных менеджеров и исполнителей производственной линии. В дивизиональной иерархии на рисунке 18 имеется единственный стратегический менеджер. Он управляет взаимодействием трех дивизионов.

На рисунке 19 изображен пример функциональной 3-иерархии. В иерархии созданы девять департаментов, каждый из которых управляет одной функциональной линией (одним видом деятельности). Каждый департамент состоит из начальника и исполнителей функциональной линии. В функциональной иерархии на рисунке 19 имеются четыре стратегических менеджера. Первый стратегический менеджер управляет взаимодействием департаментов 1, 2, 3, второй – взаимодействием департаментов 4, 5, 6, третий – взаимодействием департаментов 7, 8, 9. Высшему менеджеру непосредственно подчинены эти три стратегических менеджера. Высший менеджер управляет оставшимся взаимодействием департаментов.

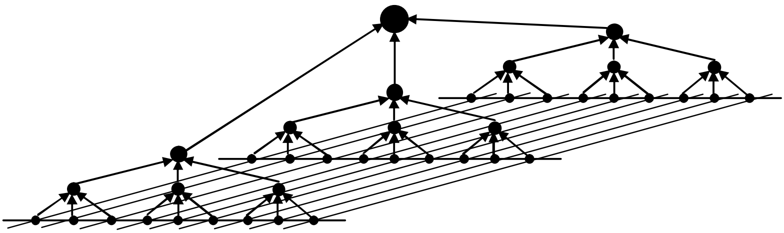

Рисунок 18. Пример дивизиональной 3-иерархии

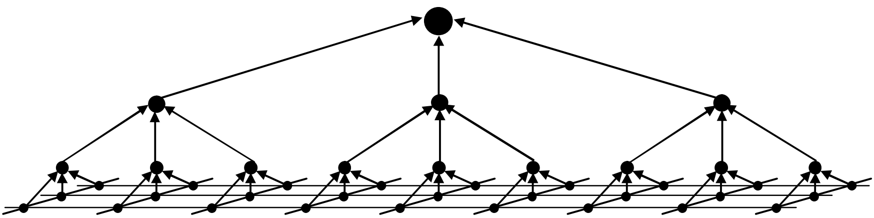

Рисунок 19. Пример функциональной 3-иерархии

На рисунке 20 изображен пример матричной иерархии. В иерархии имеются три дивизиона, каждый из которых управляет одной производственной линией (аналогично дивизиональной иерархии на рисунке 18). Кроме того, в ней созданы девять департаментов, каждый из которых управляет одной функциональной линией (аналогично функциональной иерархии на рисунке 19). Функциональные связи и ребра подчинения департаментов изображены пунктиром. Для того чтобы граф был иерархией, в нем должен быть высший менеджер. По определению высшему менеджеру непосредственно подчинены начальники всех дивизионов и всех департаментов. Чтобы не загромождать рисунок 20, высший менеджер не изображен.

Дивизиональные, функциональные и матричные иерархии ниже будем называть *типичными иерархиями*, поскольку иерархии такого вида часто встречаются на практике (Mintzberg (1979)).

Для сравнения иерархий необходимо определить затраты менеджеров. В разделах 2.4, 2.5 и 2.6 обсуждаются затраты менеджеров различного типа и определяется функция затрат.

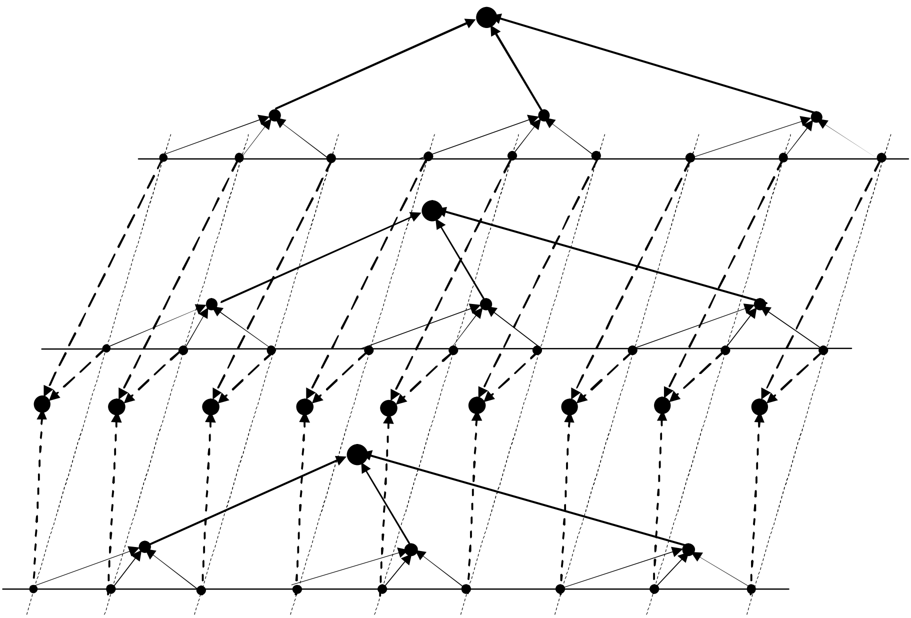

Рисунок 20. Пример матричной иерархии
(высший менеджер не изображен)

2.4. Постоянные и переменные затраты

В разделе 1.11 для степенной функции затрат была найдена оптимальная иерархия, управляющая изолированной линией[43]. Ниже мы воспользуемся этими результатами. Для определения постоянных и переменных затрат рассмотрим изолированную линию с интенсивностью потоков λ.

Пусть k – количество потоков менеджера. Интенсивность λ всех потоков одинакова. Тогда степенная функция определяет затраты менеджера следующим образом $\varphi(k\lambda) = (k\lambda)^{\alpha}$, где α – показатель степени (нестабильность внешней среды, см. формулу (10) на странице 45).

Таким образом, в разделе 1.11 затраты менеджера на управление потоком зависели только от суммарной интенсивности управляемого потока. В случае нулевой интенсивности затраты на управление были нулевыми. Однако на практике менеджер несет постоянные затраты на управление связью между исполнителями, даже если поток по этой связи незначителен или отсутствует. Ниже в настоящей главе рассмотрена более реалистичная модель, в которой управление связью влечет не только переменные, но и постоянные затраты менеджера. Определим величину переменных и постоянных затрат.

Итак, пусть k – количество потоков, которыми управляет некоторый менеджер m, и в управлении которыми он участвует. Пусть интенсивность всех потоков равна λ. Тогда *переменные затраты* $(k\lambda)^{\alpha}$ *менеджера m равны суммарной интенсивности потоков менеджера в степени* α.

Будем считать, что *в стабильной внешней среде менеджер несет постоянные затраты* $c_0 > 0$ *на управление каждой связью.* Например, менеджер может периодически оформлять отчеты по фактическому потоку. Эти затраты можно считать не зависящими от величины потока, поскольку они требуют от менеджера одних и тех же затрат независимо от того, какая величина потока фигури-

[43] То есть линией, которая никак не связана с другими линиями технологической сети.

рует в отчете. Константу постоянных затрат c_0 считаем одинаковой как для продуктовых, так и для функциональных потоков. То есть считаем, что постоянные затраты не зависят ни от интенсивности, ни от типа потоков.

Менеджер m несет постоянные затраты для каждого из k своих потоков. Таким образом, в стабильной внешней среде суммарные постоянные затраты менеджера составят kc_0. Эти затраты не зависят от величины потока, однако зависят от нестабильности внешней среды. Например, нестабильность внешней среды вызывает изменение форм и порядка разработки планов, отчетов, что заставляет менеджера корректировать формы отчетов, осваивать новые процедуры контроля. То есть нестабильность внешней среды приводит к росту как переменных затрат, так и постоянных. Поэтому будем считать, что *постоянные затраты менеджера m равны* $(kc_0)^\alpha$.

Итак, будем рассматривать следующую *функцию затрат менеджера*:

$$(k\lambda)^\alpha + (kc_0)^\alpha = k^\alpha(\lambda^\alpha + c_0^\alpha), \qquad (16)$$

где k – количество потоков менеджера, λ – интенсивность каждого потока, c_0 – постоянные затраты менеджера, связанные с одним потоком в условиях стабильности внешней среды, $\alpha > 1$ – показатель нестабильности внешней среды.

В базовой модели главы 1 рассматривалась следующая функция затрат менеджера m: $\varphi(F^{\text{int}}(m) + F^{ext}(m))$. Для симметричной линии с интенсивностью λ эту функцию затрат можно переписать в виде $\varphi((k_1 + k_2)\lambda)$, где k_1 и k_2 – соответственно количество внутренних и внешних потоков менеджера m. Таким образом, для степенной функции затраты определялись выражением $k^\alpha\lambda^\alpha$, где $k = k_1 + k_2$ – общее количество потоков менеджера m. В формуле (16) затраты менеджера равны $k^\alpha(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$. То есть введение постоянных затрат лишь изменило множитель λ^α на множитель $(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$ для всех менеджеров любой иерархии. Очевидно, что при этом в затратах любой иерархии множитель λ^α также поменяется на множитель $(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$. То есть **введение постоян-**

ных затрат не изменило вида оптимальной иерархии, управляющей симметричной линией, поэтому все результаты раздела 1.11 остаются справедливыми и для функции затрат (16). Кратко изложим те результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

Оптимальная норма управляемости r_* определяется формулой (13) (страница 48). В формуле (14) множитель λ^α заменится множителем $(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$. Таким образом**, затраты любых менеджеров, управляющих всеми потоками изолированной симметричной линии, не меньше**:

$$(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)(r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1)\,. \qquad (17)$$

Если $n-1$ делится нацело на r_*-1, то для изолированной симметричной линии оптимально r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этого дерева определяются формулой (17). Ниже мы будем рассматривать и производственные и функциональные линии. Поэтому будем считать, что и $n-1$ и $l-1$ делятся нацело на r_*-1. То есть **для изолированной линии (как производственной, так и функциональной) оптимально r_*-дерево.**

2.5. Потоки и затраты менеджеров среднего звена и стратегических менеджеров

В разделе 2.3 были определены два типа менеджеров среднего звена и два типа стратегических менеджеров. В этом разделе определены потоки менеджера каждого типа и соответствующие затраты.

Затраты дивизионального менеджера и оптимальный дивизион

Дивизиональный менеджер управляет только исполнителями одной производственной линии (процессом выпуска продукта производственной линии). Пусть m – некоторый дивизиональный менеджер, управляющий исполнителями i-й производственной линии ($s(m) \subseteq N_i$). Внутри группы $s(m)$, управляемой менеджером, имеются только продуктовые потоки. Следовательно, *дивизиональ-*

ный менеджер управляет только внутренними продуктовыми потоками. Исполнители группы $s(m)$ обмениваются продуктовыми потоками с другими исполнителями из N_i или с продуктовой внешней средой w_{env}^{prod}. Таким образом, *дивизиональный менеджер участвует в управлении внешними продуктовыми потоками группы* $s(m)$. Кроме того, исполнители группы $s(m)$ обмениваются функциональными потоками с другими производственными линиями или с функциональной внешней средой w_{env}^{func}. Однако дивизиональный менеджер отвечает за выпуск продукта производственной линии и не контролирует функциональное взаимодействие. Поэтому будем считать, что *дивизиональный менеджер не участвует в управлении функциональными потоками*.

Например, на рисунке 21 изображен отдельный дивизион – фрагмент дивизиональной иерархии (см. рисунок 18). Менеджеру m непосредственно подчинены три менеджера: m_1, m_2 и m_3. Менеджер m управляет двумя внутренними продуктовым потоками и участвует в управлении двумя внешними продуктовыми потоками (толстые линии на рисунке 21). Однако m не участвует в управлении внешними функциональными потоками (пунктирные линии на рисунке 21).

Таким образом, **дивизиональный менеджер управляет производственной линией без учета ее функциональных связей**. То есть затраты дивизионального менеджера совпадают с затратами менеджера, управляющего исполнителями изолированной производственной линии с интенсивностью потоков λ. Поэтому в соответствии с формулой (16) **затраты дивизионального менеджера равны**:

$$(k\lambda)^{\alpha} + (kc_0)^{\alpha} = k^{\alpha}(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha}), \tag{18}$$

где k – количество продуктовых потоков менеджера.

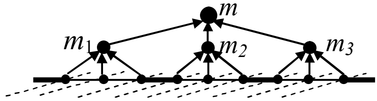

Рисунок 21. Дивизиональный менеджер управляет производственной линией без учета ее функциональных связей

Затраты всего дивизиона совпадают с затратами иерархии, управляющей независимой производственной линией. Следовательно, дивизионом с минимальными затратами будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Назовем это дерево *оптимальным дивизионом*. В дивизионе имеется n исполнителей, связанных продуктовыми потоками интенсивности λ (см. рисунки 16 и 17). Поэтому в соответствии с формулой (17) **затраты оптимального дивизиона равны**:

$$(n-1)(\lambda^{\alpha}+c_0^{\alpha})(r_*+1)^{\alpha}/(r_*-1)\,. \qquad (19)$$

Это минимально возможные затраты менеджеров, управляющих всеми продуктовыми потоками производственной линии длины n.

Затраты функционального менеджера и оптимальный департамент

По аналогии с затратами дивизиональных менеджеров определим затраты функциональных менеджеров.

Функциональный менеджер в организации несет ответственность за деятельность одного вида (управление исполнителями одной функциональной линии, имеющими аналогичные обязанности). Пусть m – некоторый функциональный менеджер, управляющий исполнителями j-й функциональной линии ($s(m)\subseteq N^j$). Внутри группы $s(m)$, управляемой менеджером, имеются только функциональные потоки. Следовательно, *функциональный менеджер управляет только внутренними функциональными потоками*. Исполнители группы $s(m)$ обмениваются функциональными потоками с другими исполнителями из N^j или с функциональной внешней средой w_{env}^{func}. Таким образом, *функциональный менеджер участвует в управлении внешними функциональными потоками группы* $s(m)$. Кроме того, исполнители группы $s(m)$ обмениваются продуктовыми потоками с другими функциональными линиями или с продуктовой внешней средой w_{env}^{prod}. Однако функциональный менеджер отвечает только за управление рабочим взаимодействием исполнителей, выполняющих однотипные операции внутри функциональной линии. Поэтому *функциональный менеджер не участ-*

вует в управлении продуктовыми потоками. Связь затрат функциональных менеджеров с объемами производства может быть опосредованной, поскольку при изменении интенсивности продуктовых потоков может измениться и интенсивность функциональных потоков. Но при фиксированных λ и θ будем считать, что затраты функционального менеджера не зависят от интенсивности продуктовых потоков.

Например, на рисунке 22 изображен отдельный департамент – фрагмент функциональной иерархии (см. рисунок 19). Менеджеру m непосредственно подчинены три исполнителя $w_{1,j}$, $w_{2,j}$ и $w_{3,j}$. Менеджер m управляет двумя внутренними функциональными потоками и участвует в управлении двумя внешними функциональными потоками (сплошные линии на рисунке 22). Однако m не участвует в управлении внешними продуктовыми потоками (пунктирные линии на рисунке 22).

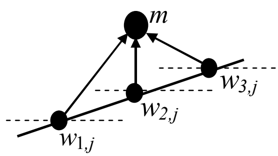

Рисунок 22. Функциональный менеджер управляет функциональной линией без учета ее продуктовых связей

Таким образом, **функциональный менеджер управляет функциональной линией без учета продуктовых потоков**. То есть затраты функционального менеджера совпадают с затратами менеджера, управляющего исполнителями изолированной функциональной линии с интенсивностью потоков θ. Поэтому по формуле (16) **затраты функционального менеджера равны**:

$$(k\theta)^{\alpha} + (kc_0)^{\alpha} = k^{\alpha}(\theta^{\alpha} + c_0^{\alpha}), \tag{20}$$

где k – количество функциональных потоков менеджера.

Затраты всего департамента совпадают с затратами иерархии, управляющей независимой функциональной линией. Следовательно, департаментом с минимальными затратами будет r_*-дерево, в котором у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Назовем это дерево *оптимальным департаментом.* В департаменте имеется l исполнителей, связанных функциональными потоками с интенсивностью θ (см. рисунки 16 и 17). Поэтому по формуле (17) **затраты оптимального департамента равны**:

$$(l-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})(r_*+1)^{\alpha}/(r_*-1)\,. \qquad (21)$$

Это минимально возможные затраты менеджеров, управляющих потоками функциональной линии длины l.

Затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием дивизионов

Пусть m – некоторый стратегический менеджер, управляющий взаимодействием дивизионов. По определению любой непосредственный подчиненный менеджера m управляет одним или несколькими дивизионами. Например, на рисунке 18 высшему менеджеру непосредственно подчинены три менеджера, каждый из которых управляет одним дивизионом. Менеджеру m подчинены некоторые дивизионы. На рисунке 18 начальники первого, второго и третьего дивизионов непосредственно подчинены менеджеру m. В общем случае его непосредственный подчиненный может управлять несколькими дивизионами.

Определим потоки менеджера m. Его подчиненные управляют всеми продуктовыми потоками внутри подчиненных производственных линий. Поэтому *m управляет только функциональными потоками внутри группы $s(m)$*, то есть только функциональным взаимодействием производственных линий (например, на рисунке 18 высший менеджер управляет восемнадцатью внутренними функциональными потоками). Также менеджер *m участвует в управлении внешними функциональными потоками группы $s(m)$* (в примере на рисунке 18 это восемнадцать функциональных потоков между дивизионами и функциональной внешней средой). Кроме того, каждый дивизион обменивается продуктовыми потоками с продуктовой внешней средой. В управлении этими потоками участвуют непосредственные подчиненные менеджера m или их подчиненные. Мы будем считать, что они полностью ответственны за выпуск продукта. Таким образом, считаем, что менеджер *m не участвует в управлении продуктовыми потоками*. То есть подчиненные «скрывают» от стратегического менеджера детали управления выпуском конкретного продукта.

Между двумя соседними дивизионами имеется функциональный поток с суммарной интенсивностью $n\theta$. Поэтому по формуле (16) затраты стратегического менеджера, управляющего взаимодействием дивизионов, равны:

$$(kn\theta)^{\alpha} + (kc_0)^{\alpha} = k^{\alpha}((n\theta)^{\alpha} + c_0^{\alpha}), \qquad (22)$$

где k – количество функциональных взаимодействий между дивизионами, которыми управляет менеджер или в управлении которыми он участвует.

Предположим, что в иерархии имеются l дивизионов, всеми функциональными взаимодействиями которых управляют стратегические менеджеры. Ни один дивизиональный менеджер, отличный от начальника дивизиона, не может быть непосредственно подчинен стратегическому менеджеру, поскольку это противоречит определению стратегических менеджеров. Таким образом, стратегические менеджеры фактически управляют «линией» длины l, которая состоит из начальников дивизионов и содержит функциональные потоки интенсивности $n\theta$. Например, на рисунке 18 высший менеджер управляет «линией» с функциональными потоками интенсивности 9θ, состоящей из трех начальников дивизионов. Подставляя в формулу (17) соответствующие значения, получим *нижнюю оценку затрат стратегических менеджеров, управляющих функциональным взаимодействием l дивизионов*:

$$(l-1)((n\theta)^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1)\,. \qquad (23)$$

Кроме того, над начальниками дивизионов можно надстроить r_*-дерево, имеющее затраты (23) и состоящее из стратегических менеджеров, каждый из которых имеет r_* непосредственных подчиненных. Следовательно, **r_*-дерево является иерархией, которая состоит из стратегических менеджеров и с минимальными затратами управляет функциональным взаимодействием l дивизионов**.

Затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов

Аналогично вышеизложенному определим затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов.

Пусть m – некоторый стратегический менеджер, управляющий взаимодействием департаментов. По определению любой непосредственный подчиненный менеджера m управляет одним или несколькими департаментами. Например, на рисунке 19 высшему менеджеру непосредственно подчинены три менеджера, каждый из которых управляет тремя департаментами.

Определим потоки менеджера m. Его подчиненные управляют всеми функциональными потоками внутри подчиненных функциональных линий. Поэтому *m управляет только продуктовыми потоками внутри группы $s(m)$*, то есть только продуктовым взаимодействием функциональных линий (например, на рисунке 19 высший менеджер m управляет шестью внутренними продуктовыми потоками). Также менеджер *m участвует в управлении внешними продуктовыми потоками группы $s(m)$* (в примере на рисунке 19 это шесть продуктовых потоков между департаментами и продуктовой внешней средой). Кроме того, каждый департамент обменивается функциональными потоками с функциональной внешней средой. В управлении этими потоками участвуют непосредственные подчиненные менеджера m или их подчиненные. Мы будем считать, что они полностью ответственны за управление функциональным взаимодействием. Таким образом, считаем, что менеджер *m не участвует в управлении функциональными потоками*. То есть подчиненные «скрывают» от стратегического менеджера детали управления рабочими процессами. Например, стратегический менеджер может распределять по департаментам план выпуска продукта и контролировать его выполнение, не заботясь о том, как именно план будет выполнен.

Между двумя соседними департаментами имеется продуктовый поток с суммарной интенсивностью $l\lambda$. Поэтому по формуле (16) затраты стратегического менеджера, управляющего взаимодействием департаментов, равны:

$$(kl\lambda)^{\alpha} + (kc_0)^{\alpha} = k^{\alpha}((l\lambda)^{\alpha} + c_0^{\alpha}), \qquad (24)$$

где k – количество продуктовых взаимодействий между департаментами, которыми управляет менеджер или в управлении которыми он участвует.

Предположим, что в иерархии имеются n департаментов, всеми продуктовыми взаимодействиями которых управляют стратегические менеджеры. Ни один функциональный менеджер, отличный от начальника департамента, не может быть непосредственно подчинен стратегическому менеджеру, поскольку это противоречит определению стратегических менеджеров. Таким образом, стратегические менеджеры фактически управляют «линией» длины n, которая состоит из начальников департаментов и содержит продуктовые потоки интенсивности $l\lambda$. Например, на рисунке 19 стратегические менеджеры управляют «линией» с продуктовыми потоками интенсивности 3λ, состоящей из девяти начальников департаментов. Подставляя в формулу (17) соответствующие значения, получим *нижнюю оценку затрат стратегических менеджеров, управляющих продуктовым взаимодействием n департаментов*:

$$(n-1)((l\lambda)^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1) . \qquad (25)$$

Кроме того, над начальниками департаментов можно надстроить r_*-дерево, имеющее затраты (25) и состоящее из стратегических менеджеров, каждый из которых имеет r_* непосредственных подчиненных. Следовательно, **r_*-дерево является иерархией, которая состоит из стратегических менеджеров и с минимальными затратами управляет продуктовым взаимодействием *n* департаментов**.

2.6. Функция затрат

Формулы (18) и (20) определяют затраты менеджеров среднего звена. Формулы (22) и (24) определяют затраты стратегических менеджеров. Пользуясь этими формулами, выпишем функцию, которая определяет затраты любого менеджера иерархии.

Для произвольной иерархии $H \in \Omega(N)$, управляющей функционально связанными производственными линиями, затраты менеджера m определяются следующей функцией:

$$c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) =$$

$$= \begin{cases} k_1^\alpha(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для дивизионального менеджера;} \\ k_2^\alpha(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для функционального менеджера;} \\ k_3^\alpha(((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для стратегического менеджера,} \\ \text{управляющего взаимодействием департаментов;} \\ k_4^\alpha(((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \text{ для стратегического менеджера,} \\ \quad \text{управляющего взаимодействием дивизионов;} \\ 0, \text{ для прочих менеджеров, у которых } F_H^{\text{int}}(m) = 0; \\ +\infty, \text{ для прочих менеджеров, у которых } F_H^{\text{int}}(m) > 0, \end{cases} \quad (26)$$

где $v_1,\ldots,v_k$ – непосредственные подчиненные менеджера m, k_1 – количество продуктовых потоков дивизионального менеджера, k_2 – количество функциональных потоков функционального менеджера, k_3 – количество продуктовых взаимодействий между департаментами, которыми управляет m или в управлении которыми он участвует, k_4 – количество функциональных взаимодействий между дивизионами, которыми управляет m или в управлении которыми он участвует.

Затраты менеджера по формуле (26) можно определить на основании групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера, и группы $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$, которой управляет менеджер m. Действительно, если $s_H(m)$ входит в продуктовую или функциональную линию, то m –дивизиональный или функциональный менеджер соответственно. Если каждая из групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ состоит из производственных линий или функциональных линий, то m – стратегический менеджер соответствующего типа. Величины k_1, k_2, k_3, k_4 и внутренний поток менеджера $F_H^{\text{int}}(m)$ (см. лемму 3 на странице 24) также полностью определяются группами $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ и группой $s_H(m)$.

Таким образом, функция затрат (26) записывается в виде секционной функции[44] $c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k))$, так же как и затраты менеджера в базовой модели (см. формулу (4) на странице 26). Базовая модель и модель настоящей главы иллюстрируют важность класса секционных функций, который исследован в главе 3. Ниже в настоящей главе найдена оптимальная иерархия для функции (26).

Функция затрат (26) допускает появление в иерархии менеджеров, которые не управляют ни одним внутренним потоком ($F_H^{\text{int}}(m)=0$). Затраты подобных менеджеров нулевые. Например, в матричной иерархии высшему менеджеру непосредственно подчинены начальники всех департаментов и всех дивизионов. За потоки производственных и функциональных линий полностью отвечают начальники дивизионов и департаментов, а также подчиненные им менеджеры. Поэтому *высший менеджер матричной иерархии не участвует в управлении потоками*. Его обязанности не связаны с управлением потоками. Однако в базовой модели и в модели настоящей главы затраты определяются только исходя из управляемых потоков. Поэтому считаем нулевыми затраты высшего менеджера матричной иерархии, который не управляет внутренними потоками. Аналогично, считаем нулевыми затраты любого менеджера, который не управляет внутренними потоками.

Функция затрат (26) запрещает построение иерархии, в которой некоторый менеджер управляет одновременно и продуктовыми функциональными потоками (затраты такого менеджера бесконечны). То есть предполагаем, что слишком велики затраты «универсального» менеджера, поскольку такой менеджер выполняет слишком разнообразные функции. Подобный менеджер изображен на рисунке 23.

Также предполагаем, что **управлять взаимодействием дивизионов или департаментов могут лишь стратегические менеджеры**. Такие менеджеры требуют для своей работы подготовленных подчиненных. Например, стратегический менеджер, управляющий взаимодействием дивизионов, требует, чтобы сами дивизионы уже были сформированы. При этом их начальники решают

[44] Строгое определение приведено на странице 95.

все проблемы с продуктовыми потоками внутри дивизиона, а стратегическому менеджеру остается лишь управлять функциональными взаимодействием дивизионов. Если же сформирована только часть дивизионов, то менеджер, управляющий этими частями, несет слишком большие затраты, поскольку ему приходится участвовать в управлении потоками обоих типов.

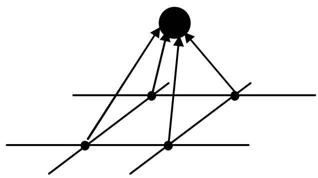

Рисунок 23. Менеджер, управляющий и продуктовыми, и функциональными потоками

В соответствии с этим предположением функция затрат (26) запрещает построение иерархии, в которой некоторый менеджер управляет взаимодействием нескольких частей разных департаментов или дивизионов (затраты такого менеджера бесконечны). Например, на рисунке 24 менеджеры m_1 и m_2 управляют взаимодействием не целых дивизионов, а лишь их частей. То есть менеджеры m_1 и m_2 не являются ни стратегическими менеджерами, ни менеджерами среднего звена. Следовательно, по формуле (26) их затраты бесконечны.

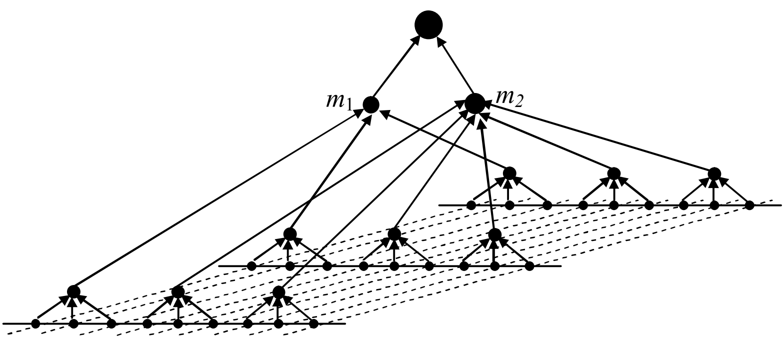

Рисунок 24. Менеджеры m_1 и m_2 управляют взаимодействием частей дивизионов

Рассмотрим функцию затрат (26) и некоторую оптимальную иерархию, управляющую функционально связанными производственными линиями. Любой продуктовый поток внутри производственной линии управляется некоторым менеджером m. То есть этот поток – внутренний для менеджера m. Поэтому $F^{\text{int}}(m) > 0$. Затраты менеджера m конечны, поскольку он входит в оптимальную иерархию. То есть в соответствии с функцией затрат (26) m – либо дивизиональный менеджер, либо стратегический менеджер, управляющий взаимодействием департаментов. Аналогичные рассуждения можно провести для функциональных потоков. В результате получим следующие выводы.

Для функции затрат (26) в оптимальной иерархии любой продуктовый поток управляется дивизиональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием департаментов. Любой функциональный поток управляется функциональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов. То есть для функции (26) **можно рассматривать только иерархии, в которых всеми потоками управляют менеджеры среднего звена и стратегические менеджеры**. Это позволяет найти оптимальную иерархию. Решению задачи об оптимальной иерархии посвящен следующий раздел.

2.7. Оптимальность типичных иерархий

Рассмотрим дивизиональную иерархию (см. пример на рисунке 18), имеющую минимальные затраты среди всех дивизиональных иерархий. Стратегическим менеджерам могут быть непосредственно подчинены начальники дивизионов, но не все прочие дивизиональные менеджеры. Поэтому сами дивизионы могут перестраиваться независимо друг от друга и от стратегических менеджеров. Если в иерархии имеется неоптимальный дивизион, то можно изменить этот дивизион с сокращением затрат всей иерархии. Таким образом, в дивизиональной иерархии с минимальными затратами все дивизионы оптимальны. Затраты оптимального дивизиона определяются формулой (19). Минимальные затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием l дивизионов, определяются формулой (23). Таким образом, **минимальные затраты имеет дивизиональная r_*-иерархия** $H_{divisional}$, в которой у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$c(H_{divisional}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)], \quad (27)$$

где r_* – оптимальная норма управляемости, зависящая от нестабильности внешней среды (см. формулу (13) на странице 48). Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет дивизиональная 3-иерархия (см. рисунок 18). В формуле (27) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам l дивизионов, второе слагаемое соответствует затратам стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием дивизионов. Общий множитель вынесен за скобку.

Аналогичные рассуждения справедливы для функциональной иерархии (см. пример на рисунке 19), которая имеет минимальные затраты среди всех функциональных иерархий. Следовательно, в функциональной иерархии с минимальными затратами все департаменты оптимальны. Затраты оптимального департамента определяются формулой (21). Минимальные затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием n департаментов, определяются формулой (25). Таким образом, **минимальные затраты имеет функциональная r_*-иерархия** $H_{functional}$, в которой у каждого менеджера ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$c(H_{functional}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)]. \quad (28)$$

Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет функциональная 3-иерархия (см. рисунок 19). В формуле (28) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам n департаментов, второе слагаемое соответствует затратам стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов.

Рассмотрим матричную иерархию (см. пример на рисунке 20), имеющую минимальные затраты среди всех матричных иерархий. Иерархия состоит из l дивизионов и n департаментов, начальники которых непосредственно подчинены высшему менеджеру. Следовательно, и дивизионы и департаменты могут перестраиваться независимо друг от друга. Поэтому в матричной иерархии с минимальными затратами все дивизионы и департаменты оптимальны. Затраты оптимального дивизиона определяются формулой (19). Затраты оптимального департамента определяются формулой (21). Таким образом, **минимальные затраты имеет матричная иерархия** H_{matrix}, в которой у каждого менеджера среднего звена ровно r_* непосредственных подчиненных. Затраты этой иерархии равны:

$$c(H_{matrix}) = \frac{(r_* + 1)^\alpha}{r_* - 1}[l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha)]. \qquad (29)$$

Например, при $\alpha = 2$ минимальные затраты имеет матричная иерархия, изображенная на рисунке 20 (высший менеджер не изображен). В формуле (29) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует затратам l дивизионов, второе слагаемое – затратам n департаментов. Внутренний поток высшего менеджера матричной иерархии нулевой, поэтому в соответствии с формулой (26) его затраты также будут нулевыми.

Вопрос об оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархии решает следующее ключевое утверждение настоящей главы.

Утверждение 5. *Для функционально связанных производственных линий и функции затрат* (26) *найдется оптимальная дивизиональная, функциональная или матричная иерархия.*

В соответствии с данным утверждением на всем множестве $\Omega(N)$ иерархий, управляющих функционально связанными производственными линиями, оптимальна одна из типичных иерархий: дивизиональная, функциональная или матричная. Таким образом, **можно не рассматривать более сложные иерархии – достаточно**

ограничиться типичными иерархиями, которые наиболее широко распространены в реальных организациях.

Например, на рисунке 25 изображена неоптимальная иерархия, которая имеет более сложный вид, чем типичные иерархии. В иерархии на рисунке 25 имеются два дивизиона. Начальники дивизионов непосредственно подчинены стратегическому менеджеру m_2, управляющему их взаимодействием, то есть функциональными связями между дивизионами. Также в рассматриваемой иерархии имеются три департамента. Начальники департаментов подчинены стратегическому менеджеру m_1, управляющему их взаимодействием, то есть продуктовыми связями между департаментами.

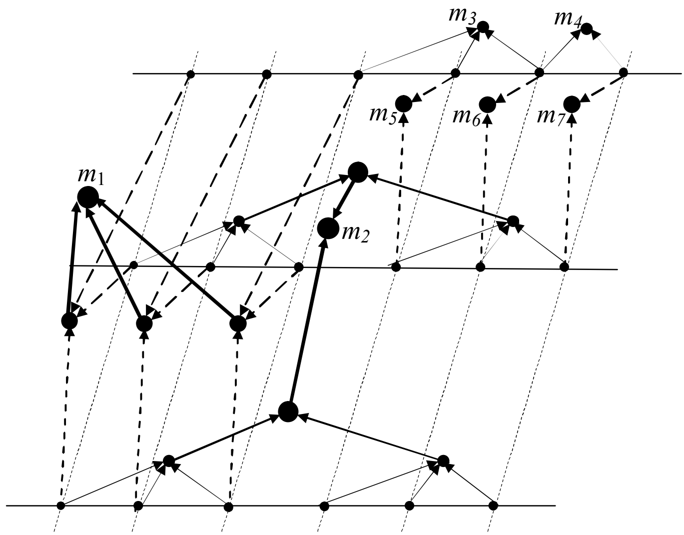

Рисунок 25. Пример нетипичной иерархии (высший менеджер не изображен)

Три продуктовые связи внутри третьей производственной линии не управляются ни дивизионами, ни стратегическим менеджером. Этими связями управляют отдельные менеджеры m_3 и m_4, не объединенные в единый дивизион. Аналогично, три функциональных связи управляются отдельными менеджерами m_5, m_6 и m_7, не объединенными в департаменты. Высшему менеджеру непосредственно подчинены менеджеры m_1-m_7. Высший менеджер не изображен, чтобы не загромождать рисунок.

В соответствии с утверждением 5 затраты иерархии на рисунке 25 не меньше затрат одной из типичных иерархий. Доказательство утверждения 5 основано на сравнении затрат произвольной оптимальной иерархии с затратами типичных иерархий.

В следующем разделе типичные иерархии сравниваются друг с другом, что позволяет найти оптимальную иерархию при различных значениях параметров моделируемой системы.

2.8. Условия оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий

По утверждению 5 оптимальной будет дивизиональная, функциональная или матричная иерархия. Во всех случаях **оптимальная норма управляемости равна r_***, причем r_* зависит только от показателя нестабильности внешней среды (см. рисунок 15 на странице 51). В крайне нестабильной внешней среде ($\alpha > 2.5$) оптимальная норма управляемости минимальна (r_*=2), при стабилизации внешней среды r_* растет.

На рисунках 18, 19 и 20 приведены примеры иерархий для случая r_*=3 (одна из них оптимальна, например, для $\alpha = 2$).

Ниже под дивизиональной, функциональной и матричной иерархией подразумеваются иерархии с оптимальной нормой управляемости r_*.

Для решения задачи об оптимальной иерархии осталось сравнить минимальные затраты типичных иерархий.

Преобразуя неравенства $c(H_{matrix}) \le c(H_{divisional})$, $c(H_{matrix}) \le c(H_{functional})$ и $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ в соответствии с формулами (27)-(29), получим условия:

$$c_0^\alpha \le \theta^\alpha \frac{n^\alpha - n}{n-1}, \; c_0^\alpha \le \lambda^\alpha \frac{l^\alpha - l}{l-1} \text{ и } \theta^\alpha \frac{n^\alpha - n}{n-1} \le \lambda^\alpha \frac{l^\alpha - l}{l-1}.$$

Таким образом, из сравнения величин $\theta^\alpha (n^\alpha - n)/(n-1)$, $\lambda^\alpha (l^\alpha - l)/(l-1)$ и c_0^α можно определить, какая из иерархий оптимальна: дивизиональная, функциональная или матричная. Если минимально значение $\theta^{\alpha}(n^{\alpha}-n)/(n-1)$, то оптимальна дивизиональная r_*-иерархия, если минимально значение $\lambda^{\alpha}(l^{\alpha}-l)/(l-1)$, то оптимальна функциональная r_*-иерархия, если минимально значение c_0^{α}, то оптимальна матричная иерархия, в которой у каждого менеджера среднего звена ровно r_* непосредственных подчиненных.

Более наглядно этот результат можно изобразить графически (см. рисунок 26). Перепишем неравенства в другой форме.

Условие оптимальности матричной иерархии можно записать в виде:

$$\frac{c_0}{\theta} \le \left(\frac{n^{\alpha}-n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ и } \frac{c_0}{\lambda} \le \left(\frac{l^{\alpha}-l}{l-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{30}$$

Условие $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ можно переписать в виде:

$$\frac{c_0}{\lambda}\left(\frac{n^{\alpha}-n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{c_0}{\theta}\left(\frac{l^{\alpha}-l}{l-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{31}$$

В соответствии с формулами (30) и (31) диаграмму оптимальности различных видов иерархии можно построить в координатах c_0/θ и c_0/λ. То есть **абсцисса будет соответствовать отношению постоянных и переменных затрат на управление функциональной связью, а ордината – отношению постоянных и переменных затрат на управление продуктовой связью в условиях стабильной внешней среды**.

Отметим, что на оптимальность дивизиональной, функциональной или матричной иерархии влияет только отношение постоянных и переменных затрат, а не «масштаб» измерения. То есть результаты не зависят от того, в каких единицах измеряются затраты.

По формулам (30) область оптимальности матричной иерархии расположена левее и ниже точки с координатами $([(n^{\alpha}-n)/(n-1)]^{1/\alpha};[(l^{\alpha}-l)/(l-1)]^{1/\alpha})$. По формуле (31) через эту точку и через точку (0;0) проходит прямая, ниже которой дивизиональная иерархия имеет меньшие затраты, чем функциональная.

На рисунке 26 изображена соответствующая диаграмма оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий.

Рассмотрим случай одинакового количества производственных и функциональных линий: $n = l$. В этом случае на рисунке 26 линия разграничения области оптимальности дивизиональной и функциональной иерархии наклонена под 45°, то есть делит всю область пополам. Интенсивности продуктовых и функциональных потоков λ и θ определяют соотношение затрат дивизиональной и функциональной иерархий. Если продуктовые связи интенсивнее функциональных ($\lambda > \theta$), то дивизиональная иерархия предпочтительнее, чем функциональная. И наоборот, при сильных функциональных связях ($\theta > \lambda$) функциональная иерархия предпочтительнее дивизиональной. Таким образом, из модели следует следующее правило: **менеджеры среднего звена должны управлять наиболее интенсивными потоками, снижая нагрузку стратегических менеджеров**. Таким образом, модель позволяет доказать правило, широко известное практикам построения организаций (например, Mintzberg (1979) приводит аргументы в пользу того, что низшие менеджеры должны управлять наиболее сложными (интенсивными) связями исполнителей, «скрывая» сложность от вышестоящих менеджеров). Для случая $n = l = 2$ Harris и Raviv (2002) также доказали указанную закономерность. Рисунок 26 позволяет сделать еще один вывод: если достаточно велика интенсивность как продуктовых, так и функциональных потоков, то оптимальна матричная иерархия, то есть менеджеры среднего звена должны управлять всеми потоками, «скрывая» их сложность от высшего менеджера.

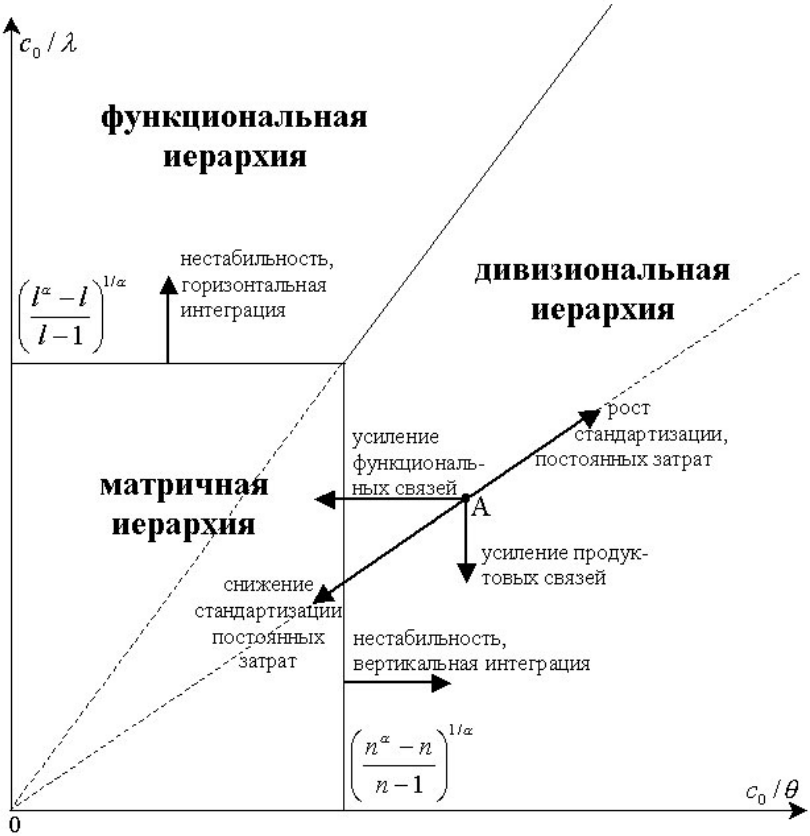

Рисунок 26. Области оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархий

Определим характер изменения границ оптимальности матричной иерархии.

Лемма 6. При $n \geq 2$ и $\alpha > 1$ величина $[(n^\alpha - n)/(n-1)]^{1/\alpha}$ монотонно возрастает по n и по α.

В силу леммы величина $[(l^\alpha - l)/(l-1)]^{1/\alpha}$ также монотонно возрастает.

Таким образом, увеличение n и α приводит к смещению вправо границы оптимальности матричной иерархии. Аналогично, увеличение l и α приводит к смещению вверх границы оптимальности матричной иерархии.

Рассмотрим случай равенства интенсивности продуктовых и функциональных потоков: $\lambda = \theta$. На рисунке 26 эта точка лежит на прямой, наклоненной под 45°, то есть делящей всю область пополам. Если $n > l$, то затраты функциональной иерархии меньше, чем затраты дивизиональной, если $n < l$ – наоборот[45]. То есть **при равной интенсивности продуктовых и функциональных потоков менеджеры среднего звена должны управлять более короткими линиями, снижая интенсивность потоков, управляемых стратегическими менеджерами**. Действительно, пусть $n > l$. Тогда предпочтительнее функциональная иерархия (см. рисунок 19), в которой менеджеры среднего звена управляют более короткими функциональными линиями, а стратегические менеджеры управляют взаимодействием линий с интенсивностью $l\lambda$. Дивизиональная иерархия (см. рисунок 18) в этом случае привела бы к тому, что стратегические менеджеры управляли бы взаимодействием «длинных» производственных линий с интенсивностью $n\theta = n\lambda > l\lambda$. Аналогично, при $n < l$ предпочтительнее дивизиональная иерархия.

Предположим, что организация растет «в обоих направлениях», то есть увеличиваются и n и l. Это приводит к расширению области оптимальности матричной иерархии (см. лемму 6 и рисунок 26). **При одновременном росте *n* и *l* стратегические менеджеры как в дивизиональной, так и в функциональной иерархии несут большие затраты, поэтому оптимальной становится матричная иерархия**.

Следует отметить, что значительный рост n и l можно компенсировать незначительным снижением потоков. При больших n и l границы оптимальности матричной иерархии растут соответственно как $n^{(\alpha-1)/\alpha}$ и $l^{(\alpha-1)/\alpha}$. В достаточно нестабильной внешней среде ($\alpha = 2$) двукратный рост n и l (то есть увеличение числа

---

[45] При $n>l$ прямая, разделяющая области оптимальности дивизиональной и функциональной иерархий, наклонена менее, чем под 45°, при $n<l$ –наоборот.

исполнителей в четыре раза) компенсируется снижением интенсивностей потоков θ и λ в $\sqrt{2} \approx 1.4$ раза. Легко видеть, что при этом на рисунке 26 точка $(c_0 / \theta; c_0 / \lambda)$ сдвинется вправо и вверх пропорционально сдвигу границ области оптимальности матричной иерархии. Если была оптимальной дивизиональная или функциональная иерархия, то они и останутся оптимальными. При стабилизации внешней среды небольшое изменение интенсивности компенсирует еще больший рост размеров. Например, при $\alpha = 1.1$ двукратный рост *n* и *l* компенсируется снижением потоков на 7%.

Указанную закономерность можно интерпретировать как «пределы роста» организации с древовидной иерархией. В полностью стабильной внешней среде организация с дивизиональной или функциональной иерархией может расти неограниченно. В реальных же ситуациях при наличии нестабильности **рост организации с древовидной иерархией ограничен,** поскольку рост затрат стратегических менеджеров заставляет передавать часть полномочий дополнительным менеджерам среднего звена – переходить к матричной иерархии.

В соответствии с леммой 6, **при увеличении нестабильности внешней среды α становится оптимальной матричная иерархия** (см. рисунок 26). В различных работах по менеджменту (см., например, Mintzberg (1979)) отмечается, что нестабильная внешняя среда приводит преимущественно к матричной иерархии. Эту закономерность, наблюдаемую на практике, модель объясняет следующим образом. В условиях меняющейся внешней среды стратегические менеджеры уже не справляются с управлением большим количеством потоков (передают полномочия по управлению всеми потоками менеджерам среднего звена). При достаточно большом показателе нестабильности границы оптимальности матричной иерархии приближаются к *n* и *l*. То есть при крайне нестабильной внешней среде матричная иерархия оптимальна при любых разумных отношениях постоянных и переменных затрат[46].

Наоборот, в стабильной внешней среде матричная иерархия не оптимальна. При $\alpha = 1$ границы оптимальности матричной иерархии становятся нулевыми (см. рисунок 26). То есть область оптимальности матричной иерархии «стягивается» в начало координат. Кроме того, в стабильной внешней среде одинаковы затраты дивизиональной и функциональной иерархий. Оптимальная норма управляемости в этом случае неограниченно возрастает (см. рисунок 15 на странице 51). То есть дивизионы и департаменты представляют собой двухуровневые иерархии, начальники которых непосредственно подчинены единственному стратегическому менеджеру.

Рассмотрим влияние стандартизации на вид оптимальной иерархии. Как указано в разделе 2.2, рост стандартизации ослабляет интенсивность производственных и функциональных потоков, которыми должны управлять менеджеры. Таким образом, рост стандартизации приводит к пропорциональному снижению величин λ и θ.

На рисунке 26 рассмотрим точку A в области оптимальности дивизиональной иерархии. Рост стандартизации приводит к сдвигу точки A по прямой, соединяющей ее с началом координат. На рисунке 26 этот сдвиг обозначен стрелкой, идущей вправо и вверх, то есть от начала координат. Поэтому рост стандартизации не изменит оптимальности дивизиональной иерархии. Наоборот, снижение стандартизации переведет организацию в область оптимальности матричной иерархии. Аналогичным образом можно рассмотреть точку в области оптимальности функциональной иерархии. В результате получим следующие выводы. Рост уровня стандартизации не изменит оптимальности дивизиональной или функциональной иерархии. Снижение уровня стандартизации приведет к оптимальности матричной иерархии.

---

[46] Постоянные затраты на управление одной связью не должны превышать переменных затрат на управление всеми связями производственной или функциональной линии.

Во многих исследованиях по менеджменту отмечено, что в реальных организациях матричная иерархия имеет место в основном в случае низкой стандартизации (см. Mintzberg (1979)). Этот факт объясняется следующим образом: низкая стандартизация приводит к перегрузке стратегических менеджеров, заставляя их увеличивать число менеджеров среднего звена, которые будут управлять всеми потоками на нижнем уровне. В построенной модели снижение стандартизации также приводит к росту затрат стратегических менеджеров.

При изменении параметров модели (в частности, стандартизации и стабильности) вид оптимальной иерархии также может измениться (см. рисунок 26). В этом случае созданная в организации иерархия становится неоптимальной и появляется необходимость *реструктуризации – изменения иерархии*[47]. Реструктуризация обычно связана с весьма большими затратами времени, средств и т.п. Поэтому полезно сделать несколько выводов об устойчивости вида оптимальной иерархии по отношению к изменению ключевых параметров модели.

Матричная иерархия устойчива к снижению уровня стандартизации и стабильности внешней среды. Повышение уровня стандартизации или стабильности может привести к неоптимальности матричной иерархии.

Дивизиональная и функциональная иерархия устойчивы к повышению уровня стандартизации и стабильности внешней среды. Снижение уровня стандартизации или стабильности может привести к оптимальности матричной иерархии.

Аналогично стандартизации можно рассмотреть изменение постоянных затрат c_0 на управление потоком. Как видно из рисунка 26, изменение c_0 приводит к тем же эффектам, что и изменение стандартизации. Таким образом, низкие постоянные затраты приводят к оптимальности матричной иерархии. Высокие постоянные затраты приводят к оптимальности дивизиональной или функцио-

[47] Без реструктуризации организация может не выдержать конкурентной борьбы, поскольку ее эффективность ниже, чем у организаций с оптимальными иерархиями.

нальной иерархии. Обратные выводы можно сделать при пропорциональном росте интенсивности потоков, то есть при росте переменных затрат. Таким образом, дивизиональная и функциональная иерархия устойчивы к росту постоянных затрат по отношению к переменным. Снижение отношения постоянных и переменных затрат приводит к оптимальности матричной иерархии. Harris и Raviv (2002) сделали аналогичный вывод о влиянии отношения постоянных и переменных затрат на оптимальность матричной иерархии. Поясним указанную закономерность. Стратегические менеджеры управляют сразу всем взаимодействием дивизионов или департаментов, не детализируя его на потоки между отдельными исполнителями. Таким образом, с точки зрения стратегического менеджера два соседних дивизиона или департамента связаны одной связью с большой интенсивностью потока, тогда как менеджеры среднего звена должны управлять большим числом связей с низкой интенсивностью потока. Поэтому рост постоянных затрат в большей степени увеличивает затраты менеджеров среднего звена, чем стратегических менеджеров. Матричная иерархия, содержащая максимальное количество менеджеров среднего звена, становится, таким образом, неоптимальной при росте постоянных затрат.

Определим *два типа роста организации*:

1. *Горизонтальная интеграция*. Соответствует увеличению количества производственных линий l. Компания может приобретать аналогичные производства, выпускающие похожие товары, либо расположенные в другом регионе и т.п. Одним из примеров горизонтальной интеграции может служить покупка нефтеперерабатывающей компанией еще одного нефтеперерабатывающего завода, что позволяет увеличить объемы производства, либо выйти на новый региональный рынок.

2. *Вертикальная интеграция*. Соответствует увеличению длины производственной линии n. Компания может приобретать предприятия, поставляющие сырье, либо приобретающие продукцию. Все это увеличивает общую длину производственной линии, то есть количество операций от получения сырья до отгрузки продукции конечному потребителю. Одним из примеров вертикальной интеграции может служить покупка нефтеперерабатывающей

компанией предприятия нефтедобычи и сети автозаправочных станций с целью контроля всей производственной цепочки – от добычи до конечного потребителя.

В литературе по менеджменту приводится большое количество примеров горизонтальной и вертикальной интеграции. Рассмотрим вопрос о том, как различные виды интеграции связаны с необходимостью реструктуризации.

Предположим, что в организации создана оптимальная дивизиональная иерархия, то есть имеется некоторая точка в области оптимальности дивизиональной иерархии. Как видно из рисунка 26, горизонтальная интеграция приведет к увеличению l, то есть к расширению областей оптимальности матричной и дивизиональной иерархии. Поэтому при горизонтальной интеграции дивизиональная иерархия останется оптимальной. Вертикальная интеграция сужает область оптимальности дивизиональной иерархии, что может потребовать реструктуризации – перехода к функциональной или матричной иерархии. Итак, для организации с дивизиональной иерархией предпочтительным видом роста является горизонтальная интеграция, поскольку вертикальная интеграция может потребовать реструктуризации.

Рассмотрим, как влияет на оптимальную иерархию изменение интенсивности потоков.

Усиление продуктовых связей соответствует росту объемов производства. Если есть возможность нарастить объемы производства без усиления функциональных связей, то точка A на рисунке 26 сдвигается вниз. При этом дивизиональная иерархия останется оптимальной, поскольку возрастут лишь затраты менеджеров среднего звена и не изменятся затраты стратегических менеджеров. Напротив, усиление функциональных связей увеличивает затраты стратегических менеджеров, что может вызвать необходимость реструктуризации (точка A на рисунке 26 сдвигается влево). Это позволяет сделать следующий общий вывод.

Дивизиональная иерархия устойчива по отношению к горизонтальной интеграции и росту объемов производства без усиления функциональных связей. Вертикальная интеграция и усиление функциональных связей могут привести организа-

цию с дивизиональной иерархией к необходимости реструктуризации.

Аналогичным образом можно рассмотреть организацию, в которой оптимальна функциональная иерархия (то есть точку в области оптимальности функциональной иерархии на рисунке 26). Получим следующие выводы.

Функциональная иерархия устойчива по отношению к вертикальной интеграции и росту функциональных связей. Горизонтальная интеграция и рост объемов производства (продуктовых потоков) могут привести организацию с функциональной иерархией к необходимости реструктуризации.

Кратко подведем итоги главы 2. Определена функция затрат, для которой оптимальна одна из типичных иерархий. Подобные виды иерархий часто встречаются на практике. Поэтому основной результат модели – оптимальность дивизиональной, функциональной или матричной иерархии – соответствует реальным организациям. Это позволяет моделировать многие практические эффекты: зависимость вида оптимальной иерархии от нестабильности внешней среды, стандартизации, интенсивности продуктовых и функциональных потоков, горизонтальной и вертикальной интеграции и т.п. Все эти эффекты исследованы с помощью примера секционной функции[48] затрат (26). Таким образом, глава 2 показывает, что исследование класса секционных функций представляет значительный интерес. Такое исследование проведено ниже в главе 3.

[48] То есть функции, в которой затраты менеджера зависят только от групп, которыми управляют его непосредственные подчиненные. Строгое определение приведено на странице 95.

3. Обобщенная модель иерархии управления

В данной главе мы рассмотрим задачу оптимизации иерархии с секционной функцией затрат общего вида, то есть с функцией затрат менеджера вида $c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k))$, где $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ – группы, управляемые непосредственными подчиненными менеджера[49].

Главы 1 и 2 показывают, что с помощью секционной функции затрат, зависящей от потоков, удается промоделировать многочисленные эффекты, которые имеют место в реальных организациях и изучаются в менеджменте. Ниже приведены примеры, показывающие, что во многих случаях интересно исследовать секционные функции затрат менеджера, которые определяются не потоками технологической сети, а другими соображениями. Таким образом, в рамках секционных функций можно исследовать разнообразные содержательные постановки задачи об оптимальной иерархии.

Класс секционных функций интересен и с математической точки зрения: любая анонимная по перестановке менеджеров и аддитивная по добавлению менеджеров функция затрат иерархии будет секционной (см. раздел 3.1).

Вообще говоря, задача об оптимальной иерархии весьма сложна. Однако в настоящей главе в ряде случаев созданы методы ее решения, применимые к широким классам секционных функций. То есть методы не зависят от вида конкретной функции, от того, из каких практических соображений она определена и т.п.

В разделе 3.1 приведено определение секционной функции и пояснение ее возможных содержательных интерпретаций. В разделах 3.2, 3.3 и 3.4 описан теоретический аппарат, позволяющий решить задачу об оптимальной иерархии для различных классов секционных функций. В разделе 3.5 приведены примеры и проиллюстрировано применение теоретических методов для поиска оптимальной иерархии. В разделе 3.6 описан метод поиска деревьев с минимальными затратами. В разделе 3.7 рассмотрено обобщение – задача об оптимальной иерархии, управляющей несколькими заданными группами исполнителей.

[49] Строгое определение секционной функции приведено ниже на странице 95.

3.1. Определение секционной функции затрат

Определение 7. *Функцию затрат менеджера* $m \in M$ *в иерархии* $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$ *назовем секционной, если она имеет вид*:

$$c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)), \tag{32}$$

где $v_1, \ldots, v_k$ – *все непосредственные подчиненные менеджера* m, $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$ – *группы, управляемые сотрудниками* $v_1, \ldots, v_k$, $c(\cdot)$ – *функция, ставящая в соответствие любому набору групп*[50] *неотрицательное действительное число. Затраты иерархии равны сумме затрат всех ее менеджеров*[51]:

$$c(H) = \sum\nolimits_{m \in M} c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)) . \tag{33}$$

Функцию затрат иерархии (33) *также назовем секционной.*

Определение 7 обобщает определения 5 и 6 (см. раздел 1.6), поскольку в определении 7 не уточняется вид функции $c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k))$. Это позволяет обобщить базовую модель.

Секционная функция затрат иерархии складывается из затрат всех менеджеров, причем затраты каждого менеджера определяются только группами исполнителей (подразделениями организации), которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера.

Поясним определение секционной функции на примере фрагмента иерархии, изображенного на рисунке 27. Менеджер m управляет группой исполнителей $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. При этом m осуществляет управление с помощью двух непосредственно подчиненных менеджеров m_1 и m_2. Подчиненный m_1 управляет группой исполнителей $\{w_1, w_2\}$, а подчиненный m_2 управляет группой исполнителей $\{w_3, w_4\}$.

[50] Функция зависит именно от набора групп $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$, а не от их порядка. То есть затраты менеджера не зависят от того, в каком порядке пронумерованы его непосредственные подчиненные $v_1, \ldots, v_k$. Некоторые группы из $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)$ могут совпадать. В этом случае множество $\{s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k)\}$ является множеством с повторениями элементов.

[51] В выражении (33) и ниже одной и той же буквой $c(\cdot)$ обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.

Предполагается, что непосредственные подчиненные m_1 и m_2 справляются со своими обязанностями. В этом случае затраты менеджера m не зависят от того, как именно m_1 и m_2 управляют подчиненными исполнителями. Например, менеджеры m_1 и m_2 могут управлять подчиненными исполнителями напрямую или с помощью одного или нескольких подчиненных менеджеров. Это никак не отразится на затратах менеджера m, так как при «нормальной работе» m управляет напрямую только менеджерами m_1 и m_2.

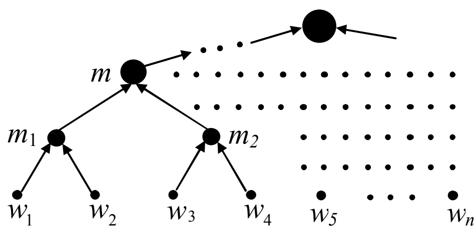

Рисунок 27. Фрагмент иерархии

Согласно определению 7 **затраты менеджера зависят только от того, каким образом подчиненная группа исполнителей распределена между непосредственными подчиненными**. В рассмотренном примере группа $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ разделена на две непересекающиеся подгруппы: $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}=\{w_1,w_2\} \cup \{w_3,w_4\}$, поэтому затраты менеджера m составят $c(\{w_1,w_2\},\{w_3,w_4\})$.

То есть предполагается, что затраты менеджера зависят только от той «*секции*» («*отдела*», «*звена*» и т.п.), которой он управляет непосредственно. На рисунке 27 такая секция состоит из самого менеджера m и его непосредственных подчиненных m_1 и m_2. От остальной части иерархии затраты менеджера не зависят.

Кроме того предполагается, что затраты зависят только от объема управленческой работы (например, планирования и контроля), а не от персональных качеств менеджеров. Таким образом, секционная функция не изменяется при перестановке менеджеров, то есть обладает свойством *анонимности*. В частности это означает, что затраты $c(\{w_1,w_2\},\{w_3,w_4\})$ менеджера m зависят только от набора групп $(\{w_1,w_2\},\{w_3,w_4\})$, а не от того, в каком порядке эти группы записаны (в каком порядке пронумерованы непосредственные подчиненные), то есть $c(\{w_1,w_2\},\{w_3,w_4\})= =c(\{w_3,w_4\},\{w_1,w_2\})$.

Кроме анонимности, секционная функция затрат обладает свойством *аддитивности*, то есть затраты иерархии складываются из затрат менеджеров, каждый из которых управляет одной «секцией» иерархии.

Воронин и Мишин (2003), Мишин (2003b) рассмотрели произвольные функции затрат, заданные на некотором множестве иерархий Ω. Для таких функций удалось обобщить свойства анонимности и аддитивности и доказать, что **любая анонимная и аддитивная функция затрат иерархии**[52] **будет секционной**.

Таким образом, класс секционных функций достаточно широк. В рамках этого класса построены различные модели оптимизации иерархии управления (см. главы 1, 2 и примеры, приведенные в настоящей главе), и есть основания полагать, что многие важные эффекты, связанные с иерархиями, могут быть промоделированы с помощью секционных функций. Поэтому важно их изучение и решение задачи об оптимальной иерархии. Этому и посвящена настоящая глава.

В общем случае затраты менеджера могут зависеть от его персональных качеств, уровня в иерархии, непосредственных начальников и даже всей иерархии в целом. Подобные функции затрат не будут секционными. Их изучение выходит за рамки настоящей работы.

В определении 7 среди групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ могут быть повторяющиеся группы или группы, вложенные друг в друга. Предположим, что $s_H(v_1) \subseteq s_H(v_2)$. Это означает, что сотрудник v_1 управляет частью группы, которая подчинена сотруднику v_2. То есть один непосредственный подчиненный менеджера m дублирует часть обязанностей другого непосредственного подчиненного. В базовой модели такое дублирование не могло снизить затраты менеджера (см. лемму 4 на странице 28).

[52] То есть функция $c:\Omega \to R_+$, отображающая множество иерархий в множество неотрицательных действительных чисел.

Ниже будут рассмотрены только секционные функции, для которых выполнены условия леммы 4. То есть при $s_H(v_1) \subseteq s_H(v_2)$ выполнено неравенство:

$$c(s_H(v_2),\ldots,s_H(v_k)) \le c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)) .$$

Содержательно это соответствует тому, что затраты менеджера m не снижаются при добавлении «вспомогательного» непосредственного подчиненного v_1, который может выносить на уровень менеджера m вопросы взаимодействия внутри группы $s_H(v_2)$, которые сотрудник v_2 решал самостоятельно.

При условии выполнения леммы 4 доказательство утверждения 1 справедливо для любой секционной функции. Поэтому утверждение 1 (страница 28) выполнено для рассматриваемых секционных функций. То есть **при поиске оптимальной иерархии можно ограничиться иерархиями, для которых выполнены условия (i)-(iii) утверждения 1**: все менеджеры управляют разными группами исполнителей, все сотрудники подчинены одному высшему менеджеру, среди непосредственных подчиненных менеджера ни один не управляет другим. Условия (i)-(iii) будут использованы ниже. Этим условиям удовлетворяют все оптимальные иерархии, найденные ниже.

Для функции затрат менеджера вместо записи $c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k))$ часто будет использоваться упрощенная запись $c(s_1,\ldots,s_k)$. При этом подразумевается, что *величина* $c(s_1,\ldots,s_k)$ *соответствует затратам некоторого менеджера, непосредственные подчиненные которого управляют группами* $s_1,\ldots,s_k$.

3.2. Оптимальность древовидной иерархии

Как показывает пример раздела 1.9 (страница 32), среди древовидных иерархий может не быть оптимальных. Однако в ряде случаев дерево с минимальными затратами оптимально. Например, над симметричной производственной линией оптимальна древовидная иерархия (см. раздел 1.10). Над функционально связанными производственными линиями в ряде случаев также оптимально дерево – дивизиональная или функциональная иерархия (см. раздел 2.8). Кроме того, древовидные иерархии весьма распространены в реальных организациях.

В связи с этим, важно найти условия оптимальности дерева. Рассмотрим достаточное условие оптимальности дерева – монотонность по группам.

Определение 8. *Будем говорить, что секционная функция монотонна по группам, если затраты менеджера не убывают при расширении групп, управляемых непосредственными подчиненными, и при добавлении новых непосредственных подчиненных, то есть для любого набора групп* $s_1, \ldots, s_k$ *выполнены неравенства*:

$c(s_1, s_2, \ldots, s_k) \le c(s, s_2, \ldots, s_k)$, *где группа* s *содержит* s_1 ($s_1 \subset s$);

$c(s_1, s_2, \ldots, s_k) \le c(s, s_1, s_2, \ldots, s_k)$, *где* s *– произвольная группа.*

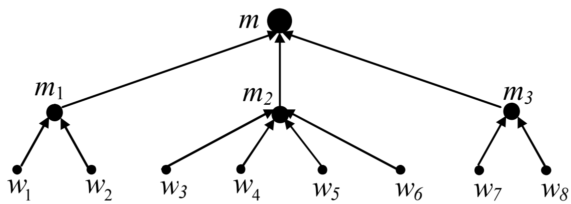

Рисунок 28. Пояснение условия монотонности по группам

Поясним определение 8 на примере. Пусть в иерархии на рисунке 28 менеджер m выполняет обязанности директора, управляя организацией с помощью трех непосредственных подчиненных m_1, m_2 и m_3, каждый из которых управляет одним отделом. Таким образом, m контактирует с начальниками отделов m_1, m_2 и m_3, решая проблемы взаимодействия отделов. При этом менеджер m может также решать часть проблем, возникающих внутри каждого из отделов. Следовательно, затраты менеджера m могут складываться из двух частей.

1. Первая часть затрат менеджера m может быть связана с управлением взаимодействием непосредственных подчиненных. Эта часть затрат зависит от количества непосредственных подчиненных, то есть определяется некоторой неубывающей функцией $\chi(\cdot)$. В примере затраты $\chi(3)$ менеджера m соответствуют управлению взаимодействием начальников отделов m_1, m_2 и m_3.

Вид функции $\chi(\cdot)$ зависит от того, какова область деятельности организации, возможные механизмы взаимодействия менеджера и непосредственных подчиненных и т.п. Приведем пример. Предположим, что начальники отделов взаимодействуют друг с другом, обращаясь к вышестоящему менеджеру только в случае невозможности решить проблемы самостоятельно (предположим, что такое событие наступает с вероятностью $0<\delta_1<1$). Если возможны только попарные взаимодействия начальников отделов, то первая часть затрат может иметь вид $\chi(k) = x_1\delta_1 k(k-1)/2$, где x_1 – средние затраты на решение проблем одного взаимодействия, k – число непосредственных подчиненных, $k(k-1)/2$ – число попарных взаимодействий. То есть первая часть затрат директора m составит $3x_1\delta_1$ (см. рисунок 28).

От менеджера может потребоваться не только решение проблем попарного взаимодействия, но и проблем взаимодействия трех, четырех и более непосредственных подчиненных. В этом случае функция $\chi(\cdot)$ может расти экспоненциально.

Различные функции затрат менеджеров, зависящие от количества непосредственных подчиненных, рассматриваются в работе Овсиевича (1979).

2. Вторая часть затрат менеджера m может быть связана с проблемами, возникающими внутри отделов. Например, менеджер может затрачивать некоторые усилия при увольнении любого подчиненного исполнителя (собеседование с новым сотрудником, подписание соответствующих документов и т.п.). Таким образом, вторая часть затрат менеджера может зависеть от количества подчиненных исполнителей, то есть определяться некоторой неубывающей функцией $\varsigma(|s_1 \cup \ldots \cup s_k|)$ от размера подчиненной группы $s_1 \cup \ldots \cup s_k$, где $s_1,\ldots,s_k$ – группы, управляемые непосредственными подчиненными. Вид функции $\varsigma(\cdot)$ зависит от того, какова область деятельности организации, круг проблем, решаемых менеджером внутри отделов и т.п.

Приведем пример. Пусть сотрудник увольняется с вероятностью $0<\delta_2<1$, а затраты менеджера в случае одного увольнения составляют величину x_2. Тогда вторая часть затрат может иметь вид $x_2\delta_2|s_1 \cup \ldots \cup s_k|$. На рисунке 28 вторая часть затрат директора m равна $8x_2\delta_2$.

Итак, секционная функция затрат может иметь вид:

$$c(s_1, \ldots, s_k) = \chi(k) + \varsigma(|s_1 \cup \ldots \cup s_k|). \qquad (34)$$

Пусть менеджеры m_1, m_2 и m_3 соответственно управляют отделом снабжения (группа $\{w_1,w_2\}$), производственным отделом (группа $\{w_3,w_4,w_5,w_6\}$) и отделом маркетинга (группа $\{w_7,w_8\}$). Предположим, что мы расширили отдел снабжения, включив в него исполнителя w_3, то есть подчинив его менеджеру m_1 (при этом w_3 также входит в производственный отдел, то есть подчинен и менеджеру m_2). Таким образом, группа $\{w_1,w_2\}$ расширилась до $\{w_1,w_2,w_3\}$. При этом затраты директора составят $c(\{w_1, w_2, w_3\}, \{w_3, w_4, w_5, w_6\}, \{w_7, w_8\}) = \chi(3) + \varsigma(8)$, то есть затраты директора не изменились. Аналогично, функция (34) не убывает при любом расширении групп, то есть удовлетворяет первому условию определения 8.

Изменим иерархию, изображенную на рисунке 28. Примем трех новых исполнителей w_9,w_{10},w_{11} и менеджера m_4. Сформируем из них еще один отдел (то есть подчиним исполнителей менеджеру). Менеджера m_4 подчиним непосредственно директору m. При этом затраты директора определяются следующим образом: $c(\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4, w_5, w_6\}, \{w_7, w_8\}, \{w_9, w_{10}, w_{11}\}) = \chi(4) + \varsigma(11)$. То есть затраты директора не уменьшились. Аналогично, функция (34) не убывает при добавлении любых непосредственных подчиненных[53], то есть удовлетворяет второму условию определения 8.

Итак, функция (34) может описывать затраты менеджера реальной организации и является монотонной по группам. Ниже приведено несколько других примеров. Для монотонных по груп-

[53] На практике в ряде случаев менеджер может уменьшить свои затраты за счет увеличения числа непосредственно подчиненных менеджеров («помощников»). Однако если бо́льшая часть затрат менеджера связана с координацией непосредственных подчиненных, то разумно моделировать организацию с помощью монотонной по группам функции.

пам функций удается определить вид оптимальной иерархии. Основной результат сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 6. *Если функция затрат монотонна по группам, то существует оптимальное дерево.*

Согласно утверждению 6 **для монотонных по группам функций можно искать оптимальную иерархию в классе деревьев**. То есть в оптимальной иерархии непосредственные подчиненные менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей (не «дублируют» друг друга).

Таким образом, достаточно проверить неравенства определения 8 и в случае их выполнения рассматривать только древовидные иерархии. Это позволяет значительно упростить поиск оптимальной иерархии.

Следовательно, утверждение 6 позволяет на основании проверки неравенств для функции затрат менеджеров сделать вывод о виде оптимальной иерархии в целом.

Заметим, что функция затрат базовой модели (см. определение 5 на странице 25) не является монотонной по группам. Приведем пример. Пусть исполнители $w_1,\ldots,w_8$ в иерархии, приведенной на рисунке 28, объединены некоторой производственной линией. Внутренний поток менеджера m содержит величины $f(w_2,w_3)$ и $f(w_6,w_7)$. Расширим группу, управляемую менеджером m_1, подчинив ему исполнителя w_3. Тогда поток $f(w_2,w_3)$ будет управляться менеджером m_1, а не высшим менеджером m. Следовательно, затраты m могут снижаться при расширении группы, которой управляет непосредственный подчиненный. Это противоречит определению 8.

То есть функция затрат базовой модели, зависящая от потоков, не является монотонной по группам. Несмотря на это, в некоторых случаях оптимально дерево с минимальными затратами (например, в случае симметричной производственной линии, раздел 1.10). Таким образом, **условие монотонности по группам является достаточным, но не необходимым условием оптимальности древовидной иерархии**.

В силу утверждения 6 при удовлетворении условия монотонности по группам для решения задачи об оптимальной иерархии достаточно найти дерево, имеющее минимальные затраты.

Найти дерево с минимальными затратами позволяют алгоритмы, разработанные Ворониным и Мишиным (2001, 2003). Для произвольной секционной функции затрат точный алгоритм имеет высокую вычислительную сложность, позволяя решить задачу не более чем для 15-20 исполнителей[54]. Рассмотрим функцию затрат, которая имеет вид $c(|s_1|,\ldots,|s_k|)$, то есть зависит только от количества непосредственных подчиненных и от количества исполнителей в тех группах, которыми они управляют (но не от состава этих групп!). В этом случае точный алгоритм позволяет решать задачу для 70-100 исполнителей. Например, функцию (34) можно записать в вышеуказанном виде. Поэтому для нее алгоритм за разумное время находит оптимальную иерархию, если число исполнителей не превосходит ста.

В работе Воронина и Мишина (2001) также показано, что в общем случае существенно снизить вычислительную сложность точных алгоритмов нельзя. В связи с этим в упомянутой работе предложен ряд эвристических алгоритмов, которые позволяют с меньшей вычислительной сложностью находить деревья, затраты которых близки к минимальным. Для функций вида $c(|s_1|,\ldots,|s_k|)$ построены эвристические алгоритмы с порядком вычислительной сложности n^2 и n^3.

Для монотонных по группам функций алгоритмы решают задачу об оптимальной иерархии. Для остальных секционных функций найденное алгоритмами дерево с минимальными затратами может не быть оптимальной иерархией. Однако оно может быть полезно, например, для сравнения затрат лучшей древовидной иерархии и той иерархии, которая реально имеется в организации на данный момент.

На практике по каким-либо причинам могут рассматриваться только r-иерархии, в которых у каждого менеджера не более r

[54] Имеется ввиду решение задачи персональным компьютером в течение нескольких минут.

непосредственных подчиненных[55] (норма управляемости не превышает r). Упомянутые выше точные и эвристические алгоритмы позволяют также найти r-дерево с минимальными затратами, причем вычислительная сложность для этого случая существенно меньше. Если функция монотонна по группам, то найденное дерево будет иметь минимальные затраты среди всех r-иерархий (это можно доказать полностью аналогично доказательству утверждения 6).

В следующем разделе рассмотрены условия оптимальности иерархии с минимальной и максимальной нормой управляемости.

3.3. Оптимальность 2-иерархии и двухуровневой иерархии

В данном разделе рассмотрены свойства расширения и сужения, которые позволяют без роста затрат всей иерархии увеличивать или уменьшать число непосредственных подчиненных менеджера. Большое количество секционных функций будут расширяющими или сужающими (см. примеры раздела 3.5). В связи с этим целесообразно исследовать соответствующие виды оптимальной иерархии.

Определение 9. *Секционную функцию затрат назовем сужающей, если для любого менеджера m с непосредственными подчиненными $v_1,\ldots,v_k$, $k \geq 3$ можно без увеличения затрат иерархии переподчинить нескольких сотрудников из $v_1,\ldots,v_k$ новому менеджеру m_1 и непосредственно подчинить m_1 менеджеру m. Секционную функцию затрат назовем расширяющей, если при любых вышеуказанных переподчинениях затраты иерархии не уменьшаются.*

[55] Например, может быть известно, что в данной организации менеджер заведомо не справится более, чем с 10 непосредственными подчиненными. Это ограничение можно учитывать, рассматривая функцию затрат равную бесконечности при большем количестве непосредственных подчиненных. Однако ее исследование может потребовать дополнительных усилий, в связи с чем проще сразу рассматривать только 10-иерархии.

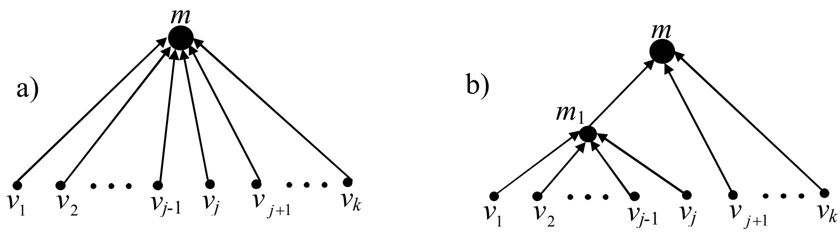

Рисунок 29. Перестроение иерархии при расширяющей и сужающей функции затрат

Поясним определение 9. На рисунке 29a) изображен исходный фрагмент иерархии, в котором менеджеру m непосредственно подчинено три или более сотрудника $v_1,\ldots,v_k$. Рассмотрим сужающую функцию. Без увеличения затрат иерархии для некоторого количества $1 < j < k$ сотрудников может быть принят новый непосредственный начальник m_1. Таким образом, менеджер m будет управлять этими сотрудниками уже не напрямую, а через своего нового непосредственного подчиненного m_1. Случай, в котором переподчиняются первые j сотрудников $v_1,\ldots,v_j$, изображен на рисунке 29b).

В общем случае могут быть переподчинены любые сотрудники. То есть найдется некоторая перестановка $(i_1,\ldots,i_k)$ чисел $(1,\ldots,k)$ такая, что будут переподчинены сотрудники $v_{i_1},\ldots,v_{i_j}$. При сужающей функции для любых групп $s_1 = s_H(v_1),\ldots,s_k = s_H(v_k)$, подчиненных сотрудникам $v_1,\ldots,v_k$, возможно провести описанное перестроение без увеличения затрат иерархии.

Таким образом, *можно записать определение сужающей функции следующим образом*. Для любого набора групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$ найдется такое количество сотрудников $1 < j < k$ и перестановка $(i_1,\ldots,i_k)$, для которых выполнено следующее неравенство:

$$c(s_1,\ldots,s_k) \geq c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k}) . \quad (35)$$

Слева в неравенстве записаны затраты менеджера m до перестроения иерархии (см. пример на рисунке 29a)), справа – затраты $c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j})$ менеджера m_1 и затраты $c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k})$

менеджера m после перестроения иерархии[56] (см. пример на рисунке 29b)). Затраты остальных менеджеров не меняются. То есть неравенство (35) соответствует невозрастанию затрат иерархии.

Содержательно неравенство (35) означает, что *при сужающей функции затрат выгодно нанять для менеджера т «помощника»* m_1, который возьмет на себя часть функций менеджера m. При этом у m уменьшится количество непосредственных подчиненных, то есть иерархия «*сузится*» (уменьшится норма управляемости).

Рассмотрим расширяющую функцию затрат. Согласно определению 9 при любых вышеуказанных переподчинениях затраты иерархии не могут снизиться. То есть для любого набора групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$, любого количества сотрудников $1 < j < k$ и любой перестановки $(i_1,\ldots,i_k)$ выполнено следующее неравенство:

$$c(s_1,\ldots,s_k) \leq c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k}). \quad (36)$$

Неравенство (36) означает, что *при расширяющей функции с помощью найма «помощника» не удастся снизить затраты иерархии*, как бы мы не назначали этому помощнику подчиненных.

Предположим, что имеется фрагмент иерархии, изображенный на рисунке 29b), и m – единственный непосредственный начальник менеджера m_1. В этом случае при расширяющей функции затрат выгодно убрать лишнего «помощника» m_1, возложив на менеджера m обязанности менеджера m_1. При этом у m увеличится количество непосредственных подчиненных, то есть иерархия «*расширится*» (увеличится норма управляемости).

Если неравенство (35) или (36) выполняется не на всех наборах групп $s_1,\ldots,s_k$, а лишь на наборах попарно непересекающихся групп (то есть $s_i \cap s_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$), то будем соответственно называть функцию затрат *сужающей на непересекающихся группах* или *расширяющей на непересекающихся группах*.

Утверждение 7. *Для сужающей функции затрат существует оптимальная 2-иерархия.*

---

[56] Согласно лемме 1 (страница 20) менеджер m_1 будет управлять группой $s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}$.

Следствие (из утверждений 6 и 7). *Для сужающей на непересекающихся группах функции затрат, которая является монотонной по группам, существует оптимальное 2-дерево.*

Доказательство утверждения 7 весьма просто и основано на вышеописанном перестроении оптимальной иерархии в случае, если какой-либо ее менеджер имеет трех и более непосредственных подчиненных.

Следствие доказывается аналогично за исключением того, что в качестве начальной оптимальной иерархии рассматривается дерево (такое дерево существует в силу утверждения 6). При доказательстве требуется лишь сужение на непересекающихся группах, поскольку в дереве не пересекаются группы, управляемые непосредственными подчиненными одного менеджера (см. лемму 2 на странице 21).

В силу утверждения 7 на основании проверки неравенства (35) для функции затрат менеджеров можно сделать вывод о виде оптимальной иерархии в целом. **При выполнении неравенства (35) функция будет сужающей, следовательно в оптимальной иерархии каждый менеджер имеет двух непосредственных подчиненных (норма управляемости минимальна)**. Более сложные иерархии в этом случае можно не рассматривать, что значительно упрощает задачу поиска оптимальной иерархии.

При выполнении условия монотонности по группам достаточно проверить неравенство (35) только на непересекающихся группах $s_1,\ldots,s_k$. Если неравенство выполнено, то согласно следствию из утверждений 6 и 7 найдется оптимальное 2-дерево. То есть достаточно найти 2-дерево с минимальными затратами, что позволяют сделать алгоритмы, разработанные Ворониным и Мишиным (2001) (см. краткое описание в разделе 3.2).

Утверждение 8. *Для расширяющей функции затрат оптимальна двухуровневая иерархия.*

Следствие (из утверждений 6 и 8). *Для расширяющей на непересекающихся группах функции затрат, которая является монотонной по группам, оптимальна двухуровневая иерархия.*

Доказательство утверждения 8 основано на последовательном удалении из оптимальной иерархии «помощников» высшего менеджера до тех пор, пока высший менеджер не будет непосредственно управлять всеми исполнителями.

Следствие доказывается аналогично за исключением того, что в качестве начальной оптимальной иерархии рассматривается дерево. При доказательстве требуется лишь расширение на непересекающихся группах.

То есть, **если выполнено неравенство (36), то функция затрат расширяющая, и оптимальна двухуровневая иерархия, в которой норма управляемости максимальна – один менеджер управляет всеми исполнителями**. В этом случае оптимальная иерархия найдена.

Согласно следствию из утверждений 6 и 8 при выполнении условия монотонности по группам достаточно проверить неравенство (36) только на непересекающихся группах $s_1,\ldots,s_k$. Ниже в разделе 3.5 на примере показано, что неравенство может быть выполнено на наборах непересекающихся групп, но не выполнено на всех наборах. Поэтому следствие может быть полезно для анализа некоторых функций затрат.

Результаты утверждений 7 и 8 показывают **противоположность свойств сужения и расширения**. Сужающая функция влечет оптимальность 2-иерархии (см. пример на рисунке 30a)). 2-иерархия содержит максимальное число менеджеров, каждый из которых выполняет минимум работы – управляет двумя непосредственными подчиненными (норма управляемости равна двум). Расширяющая функция, напротив, влечет оптимальность двухуровневой иерархии с одним менеджером (см. пример на рисунке 30b)). Этот менеджер выполняет всю «работу» по управлению n непосредственно подчиненными исполнителями (норма управляемости равна n).

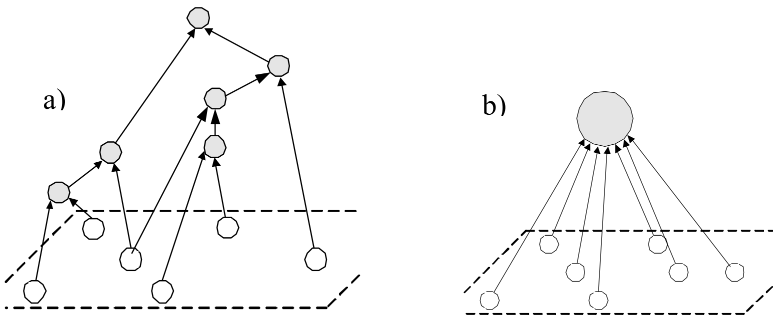

Рисунок 30. Вид оптимальной иерархии для сужающей (a) и расширяющей (b) функции затрат

Таким образом, свойства сужения и расширения приводят к предельным случаям – минимальной и максимальной норме управляемости. Большинство иерархий в реальных организациях лежат между этими двумя крайностями (Mintzberg (1979)). Однако, как показывают примеры раздела 3.5, для исследования многих функций свойства сужения и расширения весьма полезны, так как позволяют определить, при каких значениях параметров функция соответствует предельным случаям, а при каких описывает большинство реальных организаций.

Рассмотрим, как соотносится свойство расширения с базовой моделью (функцией затрат, зависящей от потоков, см. определение 5 на странице 25). Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ субаддитивна[57]. Докажем, что выполнено неравенство (36), то есть функция затрат расширяющая. Неравенству (36) соответствует перестроение иерархии. Пусть H_0 – иерархия до перестроения (см. рисунок 29b)), H_1 – иерархия после перестроения (см. рисунок 29a)). Тогда выполнено:

$$\varphi(F_{H_0}^{\text{int}}(m_1) + F_{H_0}^{ext}(m_1)) + \varphi(F_{H_0}^{\text{int}}(m) + F_{H_0}^{ext}(m)) \geq$$
$$\geq \varphi(F_{H_0}^{\text{int}}(m_1) + F_{H_0}^{ext}(m_1) + F_{H_0}^{\text{int}}(m) + F_{H_0}^{ext}(m)) \geq \varphi(F_{H_1}^{\text{int}}(m) + F_{H_1}^{ext}(m)).$$

Первое неравенство выполнено в силу субаддитивности, второе неравенство выполнено, поскольку функция $\varphi(\cdot)$ монотонна, внут-

[57] То есть для всех $x, y \in R_+^p$ выполнено неравенство $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

ренний поток менеджера m в иерархии H_1 не превышает суммы внутренних потоков менеджеров m и m_1 в иерархии H_0 ($F_{H_1}^{\text{int}}(m) \leq F_{H_0}^{\text{int}}(m) + F_{H_0}^{\text{int}}(m_1)$), внешний поток менеджера m не меняется ($F_{H_1}^{ext}(m) = F_{H_0}^{ext}(m)$). То есть выполнено неравенство (36).

Итак, для функций, зависящих от потоков, условие субаддитивности функции $\varphi(\cdot)$ приводит к тому, что соответствующая секционная функция $c(\cdot)$ будет расширяющей. В силу утверждения 2 (страница 31) для субаддитивной функции $\varphi(\cdot)$ двухуровневая иерархия оптимальна. Утверждение 8 показывает, что для произвольной расширяющей функции затрат двухуровневая иерархия также оптимальна. Итак, *свойство расширения является обобщением свойства субаддитивности функции потока на класс произвольных секционных функций*[58].

Рассмотрим вопрос о соотношении классов монотонных по группам, сужающих и расширяющих функций затрат.

В разделе 3.2 отмечено, что функция затрат, зависящая от потока, не является монотонной по группам. В случае степенной зависимости от потока функция затрат может быть расширяющей (в случае вогнутости, см. лемму 5 на странице 31), может быть ни расширяющей, ни сужающей (оптимальная норма управляемости $2 < r_* < +\infty$, см. раздел 1.11). Также встречаются сужающие функции (см. раздел 3.5), не являющиеся монотонными по группам.

Примеры раздела 3.5 показывают, что монотонная по группам функция затрат может быть и сужающей, и расширяющей, и ни сужающей, ни расширяющей. Кроме того, в предельных случаях функция может быть и сужающей, и расширяющей одновременно.

Соотношение классов монотонных по группам, сужающих и расширяющих функций изображено на рисунке 31. Также на рисунке изображен тип оптимальной иерархии для различных клас-

---

[58] Если изменить определение 5 (страница 25) так, чтобы затраты зависели только от внутренних потоков менеджера, то субаддитивность приводит к расширяющей функции затрат, а супераддитивность – к сужающей (Воронин, Мишин (2003)). То есть свойства расширения/сужения можно считать аналогами субаддитивности/супераддитивности или вогнутости/выпуклости (эти понятия эквиваленты при одномерных потоках и $\varphi(0) = 0$).

сов функций (для монотонных по группам функций оптимально дерево, для расширяющих функций оптимальна двухуровневая иерархия, для сужающих функций оптимальна 2-иерархия, для монотонных по группам сужающих функций оптимально 2-дерево).

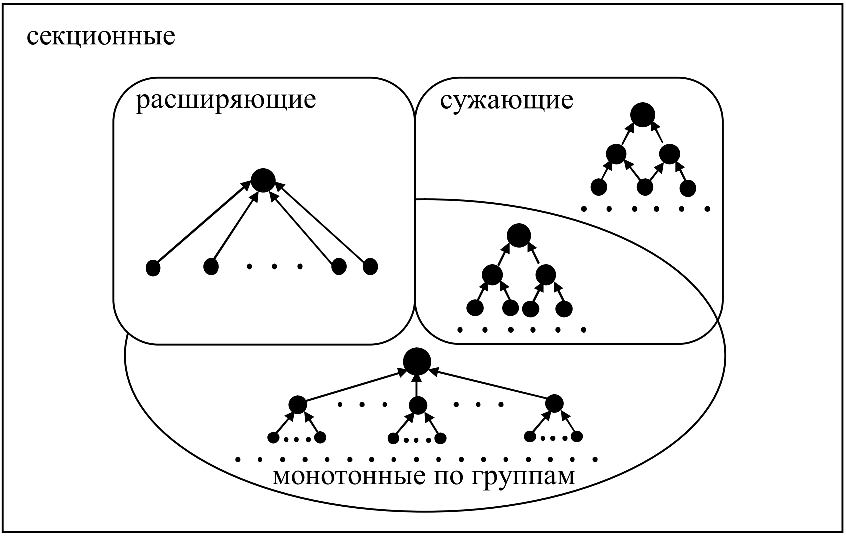

Рисунок 31. Соотношение классов и оптимальные иерархии для монотонных по группам, сужающих и расширяющих функций

В следующем разделе усилено условие сужения и доказана оптимальность 2-иерархии специального вида.

3.4. Оптимальность последовательной иерархии

Как показано в разделе 3.3, для сужающей функции затрат найдется оптимальная 2-иерархия. В данном разделе рассмотрен частный случай 2-иерархий – так называемые последовательные иерархии. Ниже вводится определение сильного сужения функции затрат, при котором последовательная иерархия оптимальна. В целом аппарат, изложенный в данном разделе позволяет для ряда функций затрат найти оптимальную иерархию (см. примеры раздела 3.5).

Определение 10. *2-иерархию назовем последовательной, если в ней каждый менеджер непосредственно управляет хотя бы одним исполнителем.*

Аналогично доказательству утверждения 1 можно доказать следующий факт: для любой последовательной иерархии H_1, найдется последовательная иерархия H_2, которая имеет не бóльшие затраты и удовлетворяет условиям (i)-(iii) утверждения 1 (см. страницу 28). То есть в H_2 все менеджеры управляют разными группами исполнителей, подчинены единственному высшему менеджеру, среди непосредственных подчиненных одного менеджера ни один не управляет другим. Следовательно, среди последовательных иерархий найдется иерархия с минимальными затратами, которая удовлетворяет условиям (i)-(iii). Поясним, как выглядит подобная иерархия H_2.

Из условия (i) и определения 10 следует, что в H_2 у каждого менеджера ровно два непосредственных подчиненных. Высший менеджер m в H_2 управляет всеми исполнителями: $s_{H_2}(m) = N$. Менеджеру m непосредственно подчинен некоторый исполнитель w' и некоторый менеджер m', то есть $s_{H_2}(m) = N = s_{H_2}(m') \cup \{w'\}$ (см. лемму 1 на странице 20). Согласно условию (iii) менеджер m' не управляет исполнителем w'. Поэтому $s_H(m') = N \setminus \{w'\}$. Аналогично, менеджеру m' непосредственно подчинен некоторый исполнитель w'' и некоторый менеджер m'', причем $s_H(m'') = N \setminus \{w', w''\}$. И так далее. Таким образом, последовательная иерархия имеет вид, приведенный на рисунке 32.

На рисунке 32 изображена последовательная иерархия общего вида. В ней исполнители $w_1,\dots,w_n$ «расположены» в некотором порядке: сначала исполнитель с номером i_1, затем исполнитель с номером i_2, и так далее. Здесь $(i_1,\dots,i_n)$ – некоторая перестановка чисел $(1,\dots,n)$. То есть в последовательной иерархии имеется n–1 менеджер: $M=\{m_1,\dots,m_{n-1}\}$ (см. рисунок 32). Первый менеджер непосредственно управляет исполнителями w_{i_1} и w_{i_2}. Второй менеджер непосредственно управляет первым менеджером и исполнителем w_{i_3}. Третий менеджер непосредственно управляет вторым менеджером и исполнителем w_{i_4}, и так далее. Высший менеджер m_{n-1} непосредственно управляет исполнителем w_{i_n} и предыдущим менеджером m_{n-2}.

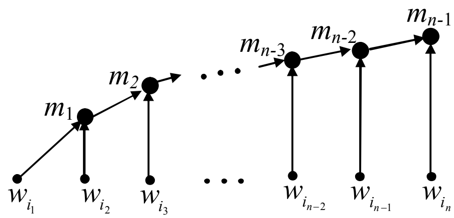

Рисунок 32. Общий вид последовательной иерархии

Интерпретировать последовательную иерархию можно различными способами. Приведем несколько примеров.

Менеджеры последовательной иерархии могут выполнять контроль качества конвейерной сборки. Каждый менеджер может контролировать качество деталей, промежуточных узлов или готового изделия. При этом для упрощения контроля (уменьшения затрат) менеджер может использовать результаты предыдущих этапов контроля качества. Например, менеджер m_1 может сообщать менеджеру m_2 результаты испытаний прочности сварных швов. На основании сообщенных данных менеджер m_2 может рассчитать прочность изделия. Без этих данных пришлось бы проводить испытания прочности всего изделия, что привело бы к росту затрат. Таким образом, затраты на контроль качества могут зависеть от порядка, в котором менеджеры контролируют качество работы исполнителей, то есть от перестановки $(i_1,\ldots,i_n)$.

Интересна также интерпретация последовательной иерархии как графа обработки информации. Кратко опишем подобные постановки.

Marschak и Radner (1972) предложили следующую модель обработки информации менеджерами организации. Предполагается, что по n входам поступает некоторая информация (например, характеризующая состояние организации). Входы можно сопоставить с исполнителями, которые сообщают менеджерам информацию. Менеджеры должны обработать информацию и найти управляющее воздействие, то есть вычислить некоторую функцию. Функция предполагается ассоциативной (например, сложение или взятие минимума).

Менеджеры организованы в древовидную иерархию. В результате менеджер получает информацию от непосредственных подчиненных и затрачивает время на вычисление и передачу результата непосредственному начальнику. Затрачиваемое время линейно зависит от числа непосредственных подчиненных. Высший менеджер вычисляет окончательный результат – управляющее воздействие. Каждое дерево характеризуется двумя параметрами – числом менеджеров и временем вычисления воздействия (задержкой). Требуется найти оптимальный баланс между этими параметрами. Например, можно рассматривать функцию затрат от задержки воздействия и от количества менеджеров (Keren и Levhari (1989)). Также возможно дополнительное ограничение – информация может поступать периодически. При этом свободные менеджеры могут начинать обработку новой информации в то время, пока остальные менеджеры еще обрабатывают предыдущую информацию. Можно рассматривать задачу построения иерархии с минимальными затратами, которая успевает обрабатывать всю поступающую информацию.

Вышеуказанные задачи рассматриваются во многих работах (см., например, Keren и Levhari (1983, 1989), Radner (1993), Van Zandt (1996)). При различных условиях оптимальными будут различные иерархии. В частности, в работе Bolton и Dewatripont (1994) оптимальная иерархия сочетает в себе последовательную иерархию («conveyer belt») и иерархию классического вида, в котором менеджерам следующего уровня подчинены только менеджеры предыдущего уровня.

Таким образом, может быть интересна интерпретация последовательной иерархии как графа обработки информации. В последовательной иерархии (см. рисунок 32) сначала свои операции производит первый менеджер, затем второй, и так далее. То есть в каждый момент времени в обработке задействован только один менеджер. Остальные менеджеры в это время простаивают.

Итак, последовательная иерархия может соответствовать последовательной обработке информации, поступающей от исполнителей. Подобная иерархия требует большого времени на обработку. Однако последовательная иерархия может справляться с обработкой интенсивного потока информации.

Поскольку под обработкой понимается вычисление ассоциативной функции, можно надстраивать любую последовательную иерархию, поскольку для любого порядка исполнителей $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ результат вычислений будет одним и тем же. Однако от разных исполнителей может поступать информация, требующая различного времени обработки или затрат на обработку. То есть, **последовательная иерархия с минимальными затратами может соответствовать эффективному последовательному вычислению**.

Рассмотрим *задачу поиска последовательной иерархии с минимальными затратами*. Во многих частных случаях эта задача решается аналитически (см. раздел 3.5). Согласно рисунку 32 последовательная иерархия полностью определяется перестановкой $(i_1,\ldots,i_n)$. Для произвольной секционной функции $n!/2$ последовательных иерархий могут иметь различные затраты[59]. Однако для поиска иерархии с минимальными затратами не требуется сравнивать все эти варианты. В работах Воронина и Мишина (2002b, 2003) построен алгоритм с порядком сложности 2^n, позволяющий найти последовательную иерархию с минимальными затратами. Для произвольной секционной функции алгоритм решает задачу за разумное время, если число исполнителей не превышает трех-четырех десятков.

С точки зрения структуры обработки информации важна задача построения оптимальной иерархии, вычисляющей не одну, а

---

[59] Всего имеется $n!$ различных последовательных иерархий. Однако перестановка местами первого и второго исполнителя (см. рисунок 32) не влияет на затраты иерархии. Следовательно, иерархий с различными затратами может быть $n!/2$. Несложно подобрать секционную функцию, при которой все эти иерархии будут иметь различные затраты.

нескольких функций. Как отмечено в обзоре Radner (1992), в настоящее время неизвестны методы решения этой задачи. Алгоритм, построенный в работах Воронина и Мишина (2002b, 2003), позволяет находить последовательную иерархию с минимальными затратами, вычисляющую несколько функций (подробнее см. раздел 3.7).

Рассмотрим ограничение на функцию затрат, при выполнении которого существует оптимальная последовательная иерархия. Это требование сильного сужения. При его выполнении задача об оптимальной иерархии решается вышеуказанным алгоритмом поиска последовательной иерархии с минимальными затратами или аналитически. Приведем формальное определение сильного сужения, а затем поясним его.

Определение 11. *Сужающую функцию затрат назовем сильно сужающей, если для любых групп s_1, s_2 из двух или более исполнителей выполнено по крайней мере одно из двух условий*:
a) для любого $w \in s_1$: $c(s_1, s_2) \geq c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\})$,
b) для любого $w \in s_2$: $c(s_1, s_2) \geq c(s_1, s_2 \setminus \{w\}) + c(s_1 \cup (s_2 \setminus \{w\}), \{w\})$.

В случае сужающей функции затрат найдется оптимальная 2-иерархия H (см. утверждение 7). Условия a) и b) определения 11 позволяют перестроить H до оптимальной последовательной иерархии. Поясним это перестроение с помощью рисунка 33.

Если в 2-иерархии H каждому менеджеру подчинен хотя бы один исполнитель, то это последовательная иерархия (см. определение 10). Иначе рассмотрим менеджера m, которому непосредственно подчинены два других менеджера m_1 и m_2 (см. рисунок 33a)). Если таких менеджеров несколько, то в качестве m рассмотрим менеджера наиболее низкого уровня. То есть подчиненные менеджеры m_1 и m_2 непосредственно управляют хотя бы одним исполнителем. На рисунке 33a) менеджер m_1 непосредственно управляет исполнителем w' и сотрудником v'. Менеджер m_2 непосредственно управляет исполнителем w'' и сотрудником v''.

Свойства сильно сужающей функции (см. определение 11) позволяют без увеличения затрат перестроить иерархию, изображенную на рисунке 33a). Обозначим $s_1=s_H(m_1)$, $s_2=s_H(m_2)$ – группы, подчиненные менеджерам m_1 и m_2. Тогда сотруднику v' подчинена группа $s_1 \setminus \{w'\}$, сотруднику v'' подчинена группа $s_2 \setminus \{w''\}$.[60]

Если для групп s_1 и s_2 выполнено условие a) определения 11, то можно перестроить иерархию так, как показано на рисунке 33b). То есть нанять менеджера m_3 и непосредственно подчинить ему менеджера m_2 и сотрудника v', а менеджеру m непосредственно подчинить исполнителя w' и менеджера m_3. До перестроения затраты менеджера m равны $c(s_1,s_2)$ (левая часть неравенства a) определения 11). После перестроения суммарные затраты менеджеров m_3 и m равны $c(s_1 \setminus \{w'\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w'\}) \cup s_2, \{w'\})$ (правая часть неравенства a) определения 11). Затраты остальных менеджеров не изменились.

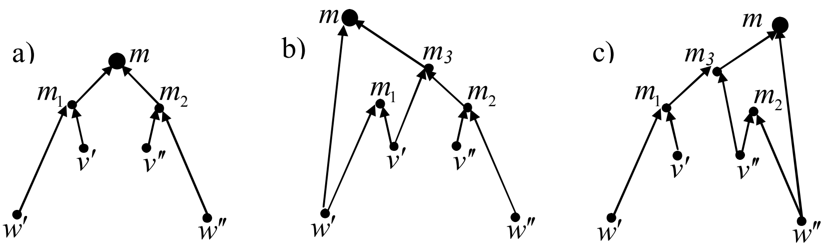

Рисунок 33. Перестроение 2-иерархии при сильно сужающей функции

Таким образом, условие a) определения 11 позволило без увеличения затрат непосредственно подчинить менеджеру m исполнителя w'. Аналогично, при выполнении условия b) определения 11 можно без увеличения затрат непосредственно подчинить менеджеру m исполнителя w'' (см. рисунок 33c)).

[60] Напомним, что согласно условию (i) утверждения 1 все менеджеры иерархии управляют различными группами исполнителей. Поэтому сотрудник v' не может управлять исполнителем w', так как в противном случае он бы управлял той же группой, что и m_1. То есть $s_H(v') = s_1 \setminus \{w'\}$. Аналогично $s_H(v'') = s_2 \setminus \{w''\}$.

Утверждение 9. *Для сильно сужающей функции затрат существует оптимальная последовательная иерархия.*

Доказательство утверждения 9 основано на описанном выше перестроении оптимальной 2-иерархии (которая существует в силу утверждения 7) до тех пор, пока не придем к оптимальной последовательной иерархии.

Утверждение 9 позволяет, проверив для сужающей функции неравенство определения 11, свести задачу об оптимальной иерархии к поиску последовательной иерархии с минимальными затратами. Как указано выше, такая иерархия может быть найдена аналитически (см. примеры раздела 3.5) или с помощью алгоритмов.

Класс сильно сужающих функций значительно уже, чем класс сужающих функций. Однако, как показано ниже в разделе 3.5, некоторые функции, интересные с содержательной точки зрения, будут сильно сужающими.

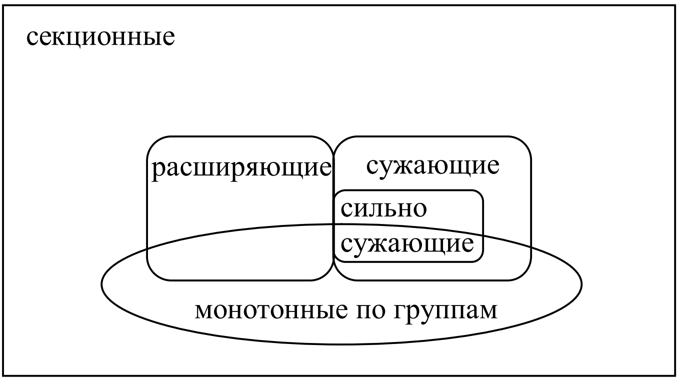

Рисунок 34. Соотношение классов монотонных по группам, сужающих, сильно сужающих, расширяющих функций затрат

По определению область сильно сужающих функций вложена в область сужающих функций. Примеры раздела 3.5 показывают, что найдется сужающая функция, которая не будет сильно сужающей. В предельных случаях функция может быть и сильно сужающей и расширяющей одновременно. Кроме того, сильно сужающая функция может как удовлетворять условию монотонности по группам, так и не удовлетворять.

Соотношение классов монотонных по группам, сужающих, сильно сужающих, расширяющих функций затрат изображено на рисунке 34.

В следующем разделе приведены примеры, которые иллюстрируют возможности применения теоретического аппарата разделов 3.2, 3.3 и 3.4 для поиска оптимальной иерархии.

3.5. Примеры функции затрат на управление взаимодействием в группе

Будем считать, что для любого исполнителя $w \in N$ задано некоторое число $\mu(w)>0$ – *сложность исполнителя*. Сложность может соответствовать «объему работы», который выполняет этот исполнитель, его квалификации и т. п. Для произвольной группы исполнителей $s \subseteq N$ определим ее сложность как сумму сложностей входящих в нее исполнителей. *Сложность группы* $\mu(s) = \sum_{w \in s} \mu(w)$ может соответствовать, например, суммарному «объему работы», который выполняют все исполнители группы.

Секционная функция затрат менеджера зависит только от «управленческих задач», которые решают непосредственные подчиненные. То есть затраты менеджера зависят только от групп $s_1,\ldots,s_k$, которыми управляют непосредственные подчиненные (см. раздел 3.1). Приведем несколько примеров секционной функции затрат менеджера, которая зависит только от сложностей групп:

$$c(s_1,\ldots,s_k) = [\mu(s_1)^\alpha + \ldots + \mu(s_k)^\alpha - \max(\mu(s_1)^\alpha,\ldots,\mu(s_k)^\alpha)]^\beta, \quad \text{(I)}$$

$$c(s_1,\ldots,s_k) = [\mu(s_1)^\alpha + \ldots + \mu(s_k)^\alpha]^\beta, \quad \text{(II)}$$

$$c(s_1,\ldots,s_k) = [\mu(s)^\alpha / \max(\mu(s_1)^\alpha,\ldots,\mu(s_k)^\alpha) - 1]^\beta, \quad \text{(III)}$$

$$c(s_1,\ldots,s_k) = [\textstyle\sum_{i=\overline{1,k}} (\mu(s)^\alpha - \mu(s_i)^\alpha)]^\beta, \quad \text{(IV)}$$

$$c(s_1,\ldots,s_k) = \mu(s)^\alpha / \min(\mu(s_1)^\beta,\ldots,\mu(s_k)^\beta), \quad \text{(V)}$$

где $s = s_1 \cup \ldots \cup s_k$ – группа, которой управляет менеджер, $\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k),\mu(s)$ – сложности соответствующих групп, $\alpha,\beta > 0$ – некоторые числовые параметры функции затрат.

Функции (I)-(V) затрат менеджера определяются сложностью («объемом работ») сотрудников «секции» (отдела, звена и т.п.), которая непосредственно подчинена менеджеру. Приведем возможные содержательные интерпретации функций (I)-(V).

В различных организациях механизмы управления непосредственными подчиненными (секцией) могут быть различны. То есть взаимодействие между менеджером и непосредственными подчиненными (внутри секции) может быть организовано различным образом. С помощью функций (I)-(V) мы попытаемся математически описать затраты менеджера на управление при различных способах взаимодействия непосредственных подчиненных внутри секции. В менеджменте рассматривается множество различных способов взаимодействия (см., например, Davies, Smith и Twigger (1991), Manz и Sims (1987), Peters (1987), Oldman и Hackman (1981), Jago и Vroom (1975)). Ниже мы попытаемся определить их математически.

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется «*полулидер*», который полностью справляется со своими обязанностями, не требуя от непосредственного начальника затрат на управление собой (см., например, Jago и Vroom (1975)). Этому случаю может соответствовать функция (I). В (I) затраты менеджера определяются сложностями групп, которые управляются всеми непосредственными подчиненными, кроме «полулидера». Под полулидером подразумевается подчиненный, который управляет наиболее сложной группой, то есть выполняет наибольший объем работы (имеет максимальную квалификацию).

Если среди непосредственных подчиненных менеджера *отсутствует «лидер»*, то менеджер несет затраты на управление всеми непосредственными подчиненными. На затраты менеджера могут влиять сложности всех групп, которыми управляют непосредственные подчиненные. Этому случаю соответствует, например, функция затрат (II).

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется «*лидер*», который помогает решить проблемы взаимодействия других непосредственных подчиненных (например, с помощью своего авторитета или опыта). За счет этого снижаются затраты непосредственного начальника (см., например, Jago и Vroom (1975)). Этому случаю может соответствовать функция затрат (III). В (III) затраты определяются сложностью всей группы, которой управляет менеджер, и сложностью той группы, которой управляет подчиненный менеджеру «лидер». Лидер управляет наиболее сложной группой (выполняет наибольший объем работы, имеет максимальную квалификацию и т.п.). Чем больше эта сложность, тем выше значение «лидера» среди остальных непосредственных подчиненных, тем более «лидер» снижает затраты непосредственного начальника. Таким образом, в функции (III) сложность группы, которой управляет менеджер, делится на сложность группы, которой управляет непосредственно подчиненный менеджеру «лидер».

Функция (IV) может описывать затраты *в процессе индивидуальной работы менеджера с непосредственными подчиненными*. Затраты определяются разностями между сложностью группы, которой управляет менеджер, и сложностями групп, которыми управляют непосредственные подчиненные. Например, менеджер m, которому подчинена группа $s_H(m)$, в процессе управления непосредственным подчиненным m_1 передает ему информацию о той части группы $s_H(m)$, которой m_1 не управляет. Объем этой информации определяется разностью сложностей $\mu(s_H(m))$ и $\mu(s_H(m_1))$. Сумма объемов информации по всем непосредственным подчиненным и определяет затраты менеджера.

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется сотрудник, который управляет группой с малой сложностью. Этот сотрудник может иметь *низкую квалификацию*. Остальные подчиненные управляют более сложными группами, соответственно их квалификация более высока. Малоквалифицированный непосредственный подчиненный может значительно увеличивать затраты менеджера. На управление этим подчиненным может требоваться слишком много усилий, которые отвлекают менеджера от решения более сложных вопросов (то есть вопросов, которые и должен решать этот менеджер). Этому случаю может соответствовать функция затрат (V). В (V) затраты менеджера определяются сложностью всей группы, которой он управляет, и сложностью группы, которой управляет наименее квалифицированный непосредственный подчиненный. Чем ниже минимальная квалификация непосредственного подчиненного, тем выше затраты непосредственного начальника. Таким образом, в функции (V) сложность группы, которая подчинена менеджеру, делится на сложность группы, управляемой наименее квалифицированным непосредственным подчиненным.

Итак, функции (I)-(V) могут соответствовать затратам менеджеров реальных организаций. Решим для этих функций задачу об оптимальной иерархии. Для функций (I)-(IV) воспользуемся теоретическим аппаратом, который был изложен выше в разделах 3.2, 3.3 и 3.4. Для функции (V) применим метод непрерывной аппроксимации (см. раздел 3.6).

Очевидно, что функции (I) и (II) монотонны по группам, функции (III), (IV) и (V) не являются монотонными по группам. Проверим свойства сужения, расширения и сильного сужения для этих функций. При проверке будут использованы следующие неравенства:

$(x_1+\ldots+x_k)^\gamma \geq x_1^\gamma+\ldots+x_k^\gamma$ для любых $x_1 \geq 0,\ldots,x_k \geq 0$ при $\gamma \geq 1$, (37)

$(x_1+\ldots+x_k)^\gamma \leq x_1^\gamma+\ldots+x_k^\gamma$ для любых $x_1 \geq 0,\ldots,x_k \geq 0$ при $\gamma \leq 1$. (38)

Неравенства (37) и (38) представляют собой частный случай неравенства Минковского (см., например, Hardy, Littlewood и Polya (1934)).

Утверждение 10. *Функция* (I) *при* $\beta \leq 1$ *– расширяющая, при* $\beta \geq 1$ *– сужающая, а при* $\beta \geq 1$ *и* $\alpha\beta \geq 1$ *– сильно сужающая.*

Доказательство утверждения 10 основано на проверке неравенств сужения и расширения (см. формулы (35) и (36) в разделе

3.3), неравенств сильного сужения (см. определение 11 в разделе 3.4).

Утверждение 10 позволяет найти оптимальную иерархию для функции (I). При $\beta \le 1$ оптимальна двухуровневая иерархия (см. утверждение 8). При $\beta \ge 1$ оптимально 2-дерево, имеющее минимальные затраты (см. следствие к утверждению 7). Найти это дерево позволяют алгоритмы, созданные Ворониным и Мишиным (2001). При $\beta \ge 1$ и $\alpha\beta \ge 1$ оптимальна последовательная иерархия, имеющая минимальные затраты (см. утверждение 9). В работе Воронина и Мишина (2003) доказано, что минимальные затраты имеет последовательная иерархия, в которой на первом месте (см. рисунок 32) расположен исполнитель с максимальной сложностью (порядок остальных исполнителей не имеет значения). Рисунок 35 иллюстрирует результаты исследования функции (I).

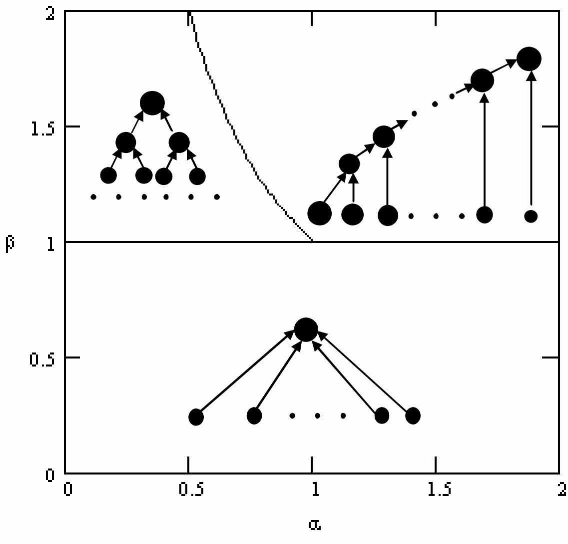

Рисунок 35. Вид оптимальной иерархии для функции (I)

Итак для функции затрат (I) утверждения 7, 8 и 9 позволили найти оптимальную иерархию аналитически, за исключением области параметров $\beta > 1$ и $\alpha\beta < 1$. В этой области задача значительно упрощена (сведена к задаче поиска 2-дерева с минимальными затратами) и для ее решения созданы алгоритмы.

Линия $\beta = 1$ разграничивает области расширения и сужения. При $\beta = 1$ функция (I) и расширяющая, и сужающая. То есть и двухуровневая иерархия с одним менеджером и некоторое 2-дерево с n–1 менеджером оптимальны. При росте β оптимальным становится только 2-дерево, при снижении – только двухуровневая иерархия. Область $\beta = 1$, $\alpha \geq 1$ показывает, что функция затрат может быть также и расширяющей, и сильно сужающей одновременно.

Утверждение 11. *Функция* (II) *при* $\beta \leq 1$ – *расширяющая, при* $\beta > 1$ *и* $\alpha \geq 1$ – *расширяющая на непересекающихся группах, при* $\beta > 1$ *и* $\alpha < 1$ – *ни расширяющая, ни сужающая*.

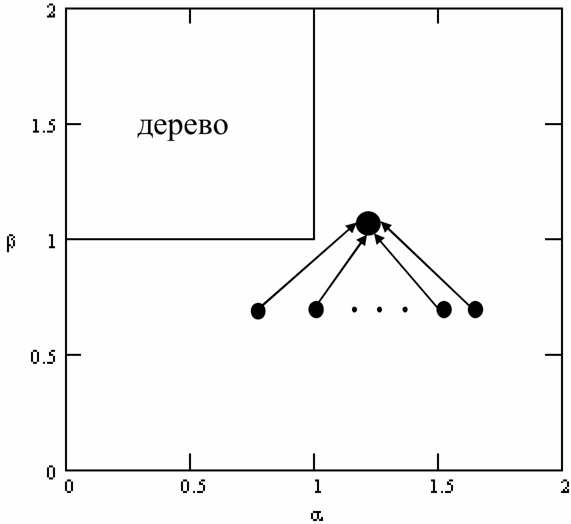

Рисунок 36. Вид оптимальной иерархии для функции (II)

Доказательство утверждения 11 основано на проверке неравенств сужения и расширения (см. формулы (35) и (36) в разделе 3.3).

Таким образом, для функции (II) можно сделать следующий вывод. При $\beta \le 1$ и при $\beta > 1$, $\alpha \ge 1$ оптимальна двухуровневая иерархия (см. утверждение 8 и следствие). Рисунок 36 иллюстрирует этот результат.

Для функции затрат (II) утверждение 8 позволило найти оптимальную иерархию, за исключением области $\beta > 1$ и $\alpha < 1$.

В области $\beta > 1$ и $\alpha < 1$ по утверждению 11 функция (II) не является ни расширяющей, ни сужающей даже на непересекающихся наборах групп. То есть для этого случая утверждения 7 и 8 не могут помочь в поиске оптимальной иерархии. Однако функция (II) монотонна по группам, поэтому оптимально дерево с минимальными затратами (см. утверждение 6). Осталось решить задачу о поиске такого дерева.

В разделе 3.6 приведен один из аналитических методов, позволяющих найти дерево с минимальными затратами для некоторых функций. Кроме того, решить задачу позволяют алгоритмы поиска дерева с минимальными затратами, построенные в работе Воронина и Мишина (2001, 2003) (подробнее см. раздел 3.2). Проиллюстрируем работу алгоритма на примере.

Рассмотрим семьдесят исполнителей (n=70) с равной сложностью (то есть с точки зрения затрат все исполнители одинаковы). Применим алгоритм для функции (II) с параметрами $\alpha = 0.5$ и $\beta = 1.5$. Оптимальная иерархия изображена на рисунке 37. В ней исполнители обозначены номерами.

В оптимальной иерархии исполнители $w_1,\dots,w_{40}$ по четыре подчиняются менеджерам второго уровня (образуют секции из четырех исполнителей). Исполнители $w_{41},\dots,w_{70}$ по пять подчиняются менеджерам второго уровня. Всего на втором уровне имеется шестнадцать менеджеров. Далее над ними надстраивается 4-дерево (4 менеджера третьего уровня и один высший менеджер). При $n = 4^3 = 64$ оптимально 4-дерево. В рассмотренном случае шесть «лишних» исполнителей распределяются на нижнем уровне, сохраняя верхнюю часть дерева.

Если сложность исполнителей одинакова, то оптимальная иерархия во многих случаях имеет форму, близкую к r-дереву (например, при $n = 25$, $n = 125$ и $n = 625$ оптимально 5-дерево[61]). При приближении β к единице функция «приближается» к расширяющей и двухуровневая иерархия становится оптимальной ($r = +\infty$). При увеличении β становится оптимальным 2-дерево ($r = 2$). В рассматриваемом примере 2-дерево становится оптимальным при $\beta \geq 3$.

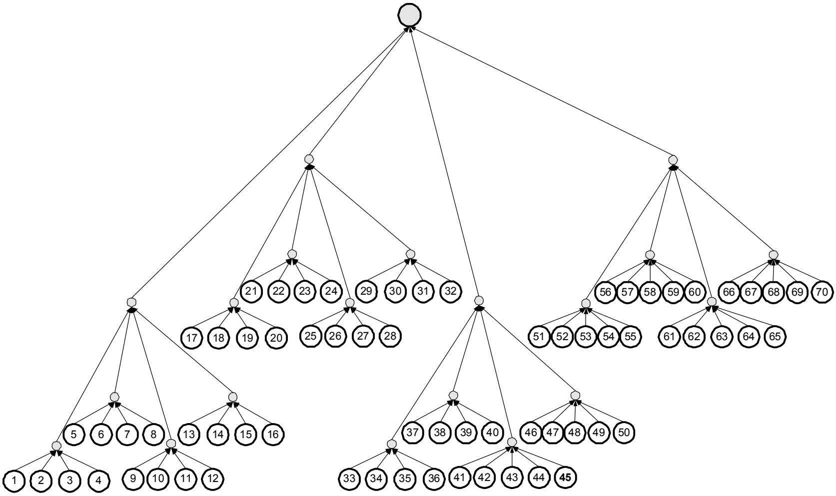

Рисунок 37. Пример оптимальной иерархии для функции (II) при $\alpha = 0.5$ и $\beta = 1.5$

Перейдем к рассмотрению функции затрат (III).

Утверждение 12. *Функция* (III) *при* $\beta \geq 1$ *– сильно сужающая*.

Доказательство утверждения 12 основано на проверке неравенства сужения (см. формулу (35) на странице 105) и неравенств сильного сужения (см. определение 11 на странице 116).

Таким образом, для функции (III) можно сделать следующий вывод. При $\beta \geq 1$ оптимальна последовательная иерархия, имею-

61 При n=125 и n=625 дерево с минимальными затратами было найдено эвристическим алгоритмом.

щая минимальные затраты (см. утверждение 9). В работе Воронина и Мишина (2003) показано, что минимальные затраты имеет последовательная иерархия, в которой исполнители, начиная со второго (см. рисунок 32), расположены в порядке невозрастания сложности. Таким образом, для решения задачи об оптимальной иерархии осталось лишь найти, какой исполнитель будет стоять на первом месте. Рисунок 38 иллюстрирует этот результат.

То есть для функции затрат (III) утверждение 9 позволило аналитически решить задачу об оптимальной иерархии при $\beta \ge 1$.

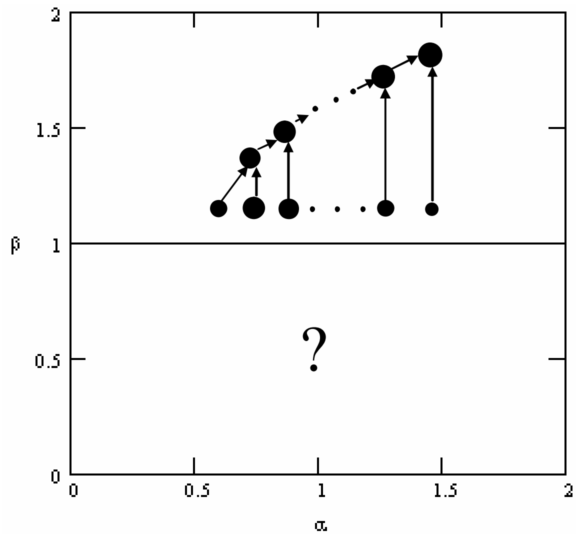

Рисунок 38. Вид оптимальной иерархии для функции (III)

При $\beta < 1$ дерево с минимальными затратами может быть найдено с помощью алгоритмов. Однако найденное дерево может не быть оптимальной иерархией, поскольку функция (III) не является монотонной по группам. На данный момент неизвестны методы поиска оптимальной иерархии для (III) при $\beta < 1$.

Утверждение 13. *Функция* (IV) *при* $\beta \ge 1$ – *сужающая*.

Доказательство утверждения 13 основано на проверке неравенства сужения (см. формулу (35) и на странице 105).

Заметим, что сужающая функция может не быть сильно сужающей. Чтобы показать это, рассмотрим пример. Пусть n=4, исполнители имеют одинаковую сложность $\mu(w_1) = \ldots = \mu(w_4) = 1$, и рассматривается функция затрат (IV) с параметрами $\alpha = 1$ и $\beta \geq 1$. Если бы сужающая функция (IV) была сильно сужающей, то последовательная иерархия с минимальными затратами была бы оптимальной (см. утверждение 9). В данном примере все последовательные иерархии имеют одинаковые затраты $2^\beta + 3^\beta + 4^\beta$ (см. рисунок 39a)).

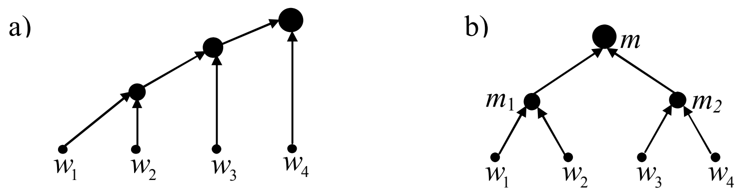

Рисунок 39. Неоптимальность последовательной иерархии для функции затрат (IV)

На рисунке 39b) изображено 2-дерево. Его затраты составляют $2^\beta + 2^\beta + 4^\beta$. То есть затраты 2-дерева меньше, чем затраты последовательной иерархии, поэтому она неоптимальна. Следовательно, сужающая функция не является сильно сужающей.

Утверждение 13 позволяет сделать следующий вывод. Для функции (IV) при $\beta \geq 1$ оптимальна 2-иерархия, имеющая минимальные затраты (см. утверждение 7). Рисунок 40 иллюстрирует этот результат.

Для функции (IV) при $\beta < 1$ на данный момент неизвестны методы поиска оптимальной иерархии. При $\beta \geq 1$ утверждение 7 позволило свести задачу к поиску 2-иерархии с минимальными затратами. В настоящий момент открыт вопрос о том, оптимально ли 2-дерево с минимальными затратами или могут быть оптимальными недревовидные иерархии. Дерево с минимальными затратами может быть найдено общими алгоритмами, решающими эту задачу для произвольной секционной функции. Однако для функции (IV) в некоторых случаях может быть использован алгоритм, имеющий значительно более низкую вычислительную сложность.

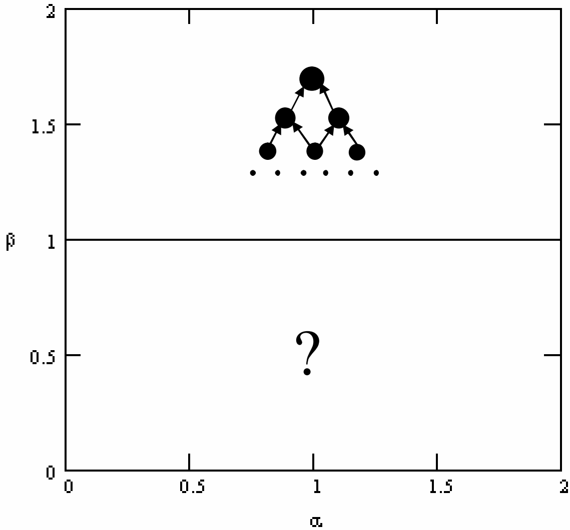

Рисунок 40. Вид оптимальной иерархии для функции (IV)

В работе Воронина и Мишина (2003) показано, что для функции (IV) при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ **задача о поиске дерева с минимальными затратами эквивалентна задаче о построении оптимального бинарного кода**. Это известная задача дискретной математики. Имеется алфавит из n символов и вероятности их появления в тексте. Необходимо сопоставить каждому символу некоторое число бит (кодовое слово) так, чтобы соответствующую любому тесту битовую последовательность можно было бы однозначно расшифровать (перевести в текст). При этом математическое ожидание длины кодового слова (длины текста) должно быть минимальным. Сопоставим исполнителям буквы алфавита, а сложностям исполнителей сопоставим вероятности появления букв в тексте. В любой 2-иерархии в каждую вершину-менеджера входит два ребра. Если на одном из них написать ноль, на другом – единицу, то каждый путь из высшей вершины в вершину-исполнителя (соответствующую символу) будет определять кодовое слово. Оказывается, что для функции (IV) при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ затраты 2-иерархии в точности равны математическому ожиданию длины кодового слова. Таким образом, 2-дерево с минимальными затратами соответствует оптимальному бинарному коду.

Поэтому для функции (IV) при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ найти 2-дерево с минимальными затратами позволяет алгоритм Хаффмана (см. Huffman (1952)). Два исполнителя минимальной сложности подчиняются одному менеджеру, который далее рассматривается как исполнитель. После этого шаг алгоритма повторяется. В итоге получим 2-дерево с минимальными затратами. Так как функция (IV) сужающая (см. утверждение 13), найденное дерево будет иметь минимальные затраты и среди всех деревьев. Порядок сложности алгоритма равен $n \log n$.

При $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ дерево с минимальными затратами, найденное алгоритмом Хаффмана, изображено на рисунке 39b). В этом примере все исполнители имеют одинаковую сложность и их число равно степени двойки. Поэтому минимальные затраты имеет «симметричное» 2-дерево, в котором непосредственные подчиненные менеджера управляют группами одинаковой сложности. В других случаях дерево может не быть симметричным. Однако алгоритм Хаффмана во всех случаях «делит» группу, подчиненную менеджеру, на две части, сложность которых «приблизительно» одинакова. Например, на рисунке 39b) менеджер m управляет группой $N=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ со сложностью 4. Эта сложность равномерно «делится» пополам между менеджерами m_1 и m_2, которые непосредственно подчинены менеджеру m.

В целом раздел 3.5 показывает, что теоретические методы разделов 3.2, 3.3 и 3.4 дают возможность найти оптимальную иерархию для многих функций затрат. Однако в ряде случаев указанных методов недостаточно. В следующем разделе описан метод непрерывной аппроксимации, позволяющий найти дерево с минимальными затратами для так называемых однородных функций. Это метод применен для анализа функции затрат (V).

3.6. Метод непрерывной аппроксимации для поиска дерева с минимальными затратами

В разделе 3.3 было доказано, что расширяющие и сужающие функции затрат приводят к оптимальности крайних случаев – двухуровневой иерархии и 2-иерархии. Как правило, в реальных организациях имеет место «промежуточная» иерархия, в которой норма управляемости $2 < r < +\infty$. Соответственно, функция затрат, описывающая организацию, не будет ни расширяющей, ни сужающей. Таким образом, весьма важна разработка методов решения задачи об оптимальной иерархии для этого случая. В данном разделе описан один из возможных методов, позволяющий в ряде случаев найти дерево с минимальными затратами. Для монотонных по группам функций это дерево оптимально (см. утверждение 6). Для прочих функций метод дает наилучшую древовидную иерархию. Ниже проиллюстрировано применение метода для функции затрат (V) (см. раздел 3.5).

Задача об оптимальной иерархии дискретна, что накладывает существенные ограничения и во многих случаях затрудняет поиск решения. Выходом может являться рассмотрение соответствующей непрерывной задачи, в которой число исполнителей не конечно, а континуально. Губко (2002) впервые исследовал задачу поиска непрерывного дерева с минимальными затратами. Решив непрерывную задачу, можно доказать, что соответствующее дерево минимизирует затраты и для дискретной задачи.

Предположим, что требуется найти дерево с минимальными затратами, и функция затрат $c(s_1,\ldots,s_k)$ зависит не от состава групп $s_1,\ldots,s_k$, а лишь от их сложностей. То есть функция затрат имеет вид $c(\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k))$ (см. примеры (I)-(V) раздела 3.5)[62].

[62] В любом дереве группы $s_1,\ldots,s_k$ не пересекаются. То есть $\mu(s_1 \cup \ldots \cup s_k) = \mu(s_1) + \ldots + \mu(s_k)$ и можно считать, что функции (I)-(V) зависят только от $\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k)$.

Будем рассматривать *однородные* функции затрат. То есть $c(y\mu(s_1),...,y\mu(s_k)) = \varphi(y)c(\mu(s_1),...,\mu(s_k))$ для любого $y>0$, где $\varphi(\cdot)$ – некоторая непрерывная возрастающая функция. Можно показать (Губко (2002)), что $\varphi(y) = y^\gamma$, где γ – *коэффициент однородности*. При однородной функции масштаб сложности не играет роли. То есть при умножении сложностей всех исполнителей на один и тот же коэффициент y затраты всех иерархий возрастут в y^γ раз. Поэтому масштаб сложности не меняет оптимальную иерархию.

Используем метод непрерывной аппроксимации. Для этого опишем соответствующую непрерывную задачу.

Обозначим суммарную сложность исполнителей дискретной задачи через $x = \mu(w_1) + \ldots + \mu(w_n)$. В непрерывной задаче считаем, что множество исполнителей имеет вид отрезка $N=[0;x]$. Отдельные исполнители соответствуют точкам этого отрезка. Считаем, что высший менеджер m управляет всеми исполнителями, то есть всем отрезком N. Отрезок делится между менеджерами $m_1,\ldots, m_k$, которые непосредственно подчинены высшему менеджеру. Каждый из них управляет некоторой частью отрезка N. То есть весь отрезок разбивается на меньшие отрезки с длинами $x_1,\ldots,x_k>0$, которыми управляют менеджеры $m_1,\ldots, m_k$ соответственно, $x_1+\ldots+x_k=x$. Отрезок длины x_i, подчиненный менеджеру m_i, снова делится на меньшие отрезки, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера m_i, $1 \le i \le k$. Полученные отрезки снова делятся, и так далее. Дерево бесконечно «растет в глубину». В нем каждому менеджеру соответствует отрезок, длина которого равна сложности подчиненной группы. Если непосредственные подчиненные менеджера управляют отрезками с длинами $x_1,\ldots,x_k$, то затраты менеджера равны $c(x_1,\ldots,x_k)$. Затраты дерева равны суммарным затратам его менеджеров. *Требуется найти бесконечное дерево с минимальными затратами.*

В работе Губко (2002) показано, что для **однородной функции найдется минимизирующее затраты самоподобное дерево** H, то есть дерево, в котором каждый отрезок делится в одной и той же пропорции $y_1,\ldots,y_k>0$, $y_1+\ldots+y_k=1$. На рисунке 41 приведен пример верхней части самоподобного дерева. Вместо менеджеров изображены подчиненные им отрезки. Непосредственные подчиненные $m_1,\ldots,m_k$ высшего менеджера m управляют отрезками с длинами $y_1x,\ldots,y_kx$. Следовательно, затраты менеджера m равны $x^{\gamma}c(y_1,\ldots,y_k)$. Суммарные затраты менеджеров $m_1,\ldots,m_k$ равны $x^{\gamma}c(y_1,\ldots,y_k)(y_1^{\gamma}+\ldots+y_k^{\gamma})$. Для менеджеров следующего уровня последняя скобка возведется в квадрат, следующего уровня – в куб, и т.д. С учетом $y_1+\ldots+y_k=1$ при $\gamma>1$ получаем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с коэффициентом $y_1^{\gamma}+\ldots+y_k^{\gamma}<1$ (см. неравенство (37) на странице 122). В итоге затраты самоподобного дерева H равны:

$$c(H)=x^{\gamma}c(y_1,\ldots,y_k)/(1-\sum\nolimits_{i=\overline{1,k}}y_i^{\gamma})\,. \qquad (39)$$

Одно из таких деревьев минимизирует затраты. Поэтому достаточно найти минимум выражения (39) по всем $k\geq 2$ и пропорциям $y_1,\ldots,y_k$. Соответствующее дерево и будет искомым бесконечным деревом с минимальными затратами.

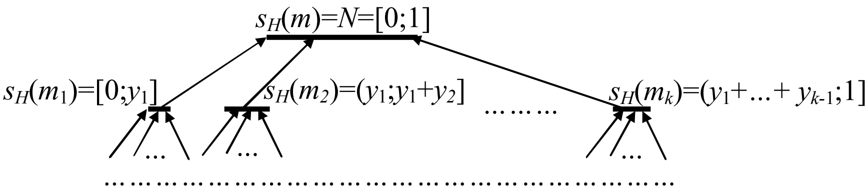

Рисунок 41. Фрагмент самоподобного дерева с пропорцией $y_1,\ldots,y_k$ при $x=1$

Найдем дерево с минимальными затратами для функции (V). В дереве непосредственные подчиненные одного менеджера управляют непересекающимися группами. Для непересекающихся групп $s_1,\ldots,s_k$ выполнено $\mu(s_1\cup\ldots\cup s_k)=\mu(s_1)+\ldots+\mu(s_k)$. Поэтому функция (V) имеет вид:

$$c(\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k))=(\mu(s_1)+\ldots+\mu(s_k))^{\alpha}/\min(\mu(s_1)^{\beta},\ldots,\mu(s_k)^{\beta})\,. \qquad (40)$$

Согласно формуле (40) функция (V) однородна. Коэффициент однородности γ равен $\alpha-\beta$. Таким образом, минимизируя затраты (39), найдем бесконечное дерево с минимальными затратами.

Утверждение 14. *Пусть r_* равно одному из двух целочисленных значений, ближайших к $r_0=((\alpha-1)/\beta)^{1/(\alpha-\beta-1)}$ снизу или сверху. В непрерывной задаче с функцией затрат* (V) *при* $\alpha-\beta>1$ *минимизирует затраты симметричное r_*-дерево, в котором каждый менеджер имеет ровно r_* непосредственных подчиненных, управляющих группами равной сложности.*

В доказательстве утверждения 14 показано, что для (V) выражение (39) достигает минимума при $y_1=\ldots=y_k=1/k$. То есть симметричное дерево минимизирует затраты. После этого выражение (39) минимизируется по k. Точка минимума $r_0=((\alpha-1)/\beta)^{1/(\alpha-\beta-1)}$ может быть не целой величиной. Поэтому r_* – одно из двух целых значений, ближайших к r_0 сверху или снизу (какое именно значение, легко проверяется подстановкой в формулы (39) и (40)).

Таким образом, при $\alpha-\beta>1$ для функции (V) решена непрерывная задача. Рассмотрим дискретную задачу, в которой число исполнителей n равно некоторой степени r_* ($n=r_*^j$), а сложности всех исполнителей одинаковы $\mu(w_1)=\ldots=\mu(w_n)=1/n$. В этом случае верхние j уровней бесконечного симметричного r_*-дерева представляют собой как раз дискретное дерево, надстроенное над исполнителями (которые соответствуют уровню $j+1$). Причем затраты этой части бесконечного дерева в точности равны затратам дискретного дерева. Следовательно, **при $n=r_*^j$ и исполнителях с одинаковой сложностью симметричное r_*-дерево будет минимизировать затраты и в дискретном случае**[63]. Итак, в указанном случае методом непрерывной аппроксимации удалось решить дискретную задачу. Результаты решения удобно изобразить графически.

На рисунке 42 изображена прямая $\beta=\alpha-1$, пространство под которой разбито на области с постоянным r_*. В этих областях оптимальная норма управляемости не меняется. Справа вверху минимизирует затраты симметричное 2-дерево[64]. Левее и ниже

[63] Иначе затраты бесконечного дерева можно было бы уменьшить, перестроив верхние j уровней в соответствии с лучшим дискретным деревом.

[64] Это дерево минимизирует затраты и при дальнейшем увеличении α, β вдоль любой прямой $\beta=b(\alpha-1)$, $0<b<1$.

минимизируют затраты симметричные 3-деревья, 4-деревья, и так далее. По мере приближения к точке (1;0) r_* неограниченно возрастает (для r_*<10 области обозначены цифрами). На рисунке 42 при росте α кривые экспоненциально убывают. На рисунке 42 схематично изображены симметричные 2-дерево и 3-дерево, в которых группа, подчиненная менеджеру, «делится» на подгруппы равной сложности между его подчиненными. Деревья для бо́льших r_* можно изобразить аналогично.

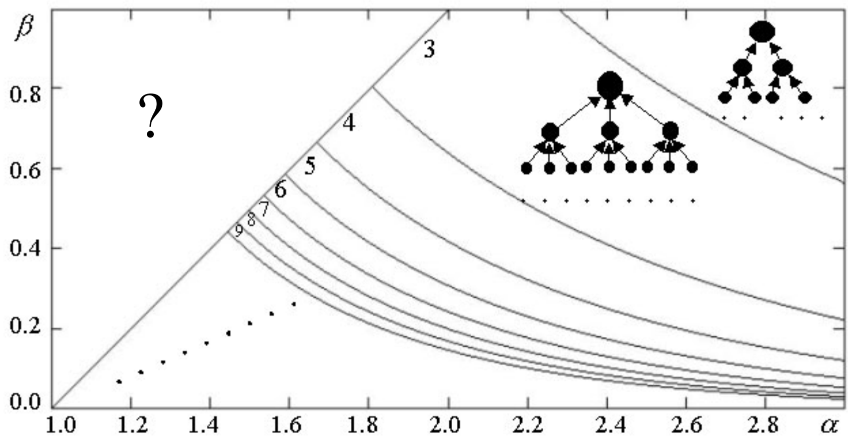

Рисунок 42. Деревья с минимальными затратами для функции (V)

Параметр β можно интерпретировать как степень отрицательного влияния низкой квалификации. При приближении β к нулю подчинение менеджеру сотрудника с малой квалификацией (управляющего группой с малой сложностью) не приводит к увеличению его затрат (см. формулу (40)). Поэтому при достаточно малом β оптимальная норма управляемости r_* стремится к $+\infty$, то есть затраты минимизирует двухуровневая иерархия, в которой один менеджер непосредственно управляет любым количеством исполнителей (при β=0 функция (V) становится расширяющей).

Можно вычислить предел величины r_0 (см. утверждение 14) при приближении к критической прямой β=α–1. Этот предел равен $e^{1/\beta}$. Таким образом, области с постоянным r_* «подходят» к критической прямой «вплотную».

В работе Qian (1994) также решалась задача поиска симметричного дерева, имеющего минимальные затраты. Рассматривалась функция затрат специального вида. Если при решении задачи допустить, что у каждого менеджера может быть нецелое количество подчиненных, то была получена оптимальная норма управляемости, равная e (у каждого менеджера e непосредственных подчиненных, см. Qian (1994)). Этот результат совпадает с результатом для функции (V) при α=2, β=1 ($\lim r_0 = e^{1/\beta} = e$).

Рисунок 42 показывает, что для любого $r \geq 2$ найдется область параметров α и β такая, что симметричное r-дерево имеет минимальные затраты. При $2 < r < +\infty$ результат соответствует большинству реальных организаций, в которых норма управляемости колеблется от нескольких непосредственных подчиненных до нескольких сотен (Mintzberg (1979)).

Аппарат, изложенный в настоящем разделе, позволяет аналитически найти дерево с минимальными затратами для некоторых однородных функций, которые не являются ни сужающими, ни расширяющими. Если функция затрат монотонна по группам, то найденное дерево оптимально.

3.7. Оптимальная иерархия, управляющая несколькими группами исполнителей

Определение 1 требует, чтобы в иерархии был менеджер, управляющий всеми исполнителями. Согласно утверждению 1 в оптимальных иерархиях ровно один такой менеджер, которому подчинены все остальные сотрудники. То есть имеется единственный менеджер, решения которого обязательны для всех остальных сотрудников организации.

Определение 1 представляется вполне разумным, если иерархия должна управлять взаимодействием всех исполнителей. Однако можно поставить и более сложную задачу. Предположим, что существует некоторая технология, в соответствии с которой исполнители могут выпускать l изделий (например, может быть задана технологическая сеть). Технология может требовать, чтобы в выпуске каждого из изделий участвовали не все исполнители, а некоторая их группа. При этом в некоторых случаях нет необходимости в менеджере, который управляет всеми исполнителями. Для выпуска каждого из изделий достаточно управлять взаимодействием исполнителей в той группе, которая выпускает изделие. Таким образом, необходимо управлять взаимодействием в заданных группах $s_1,\ldots,s_l$.

Приведем следующий пример. Пусть необходимо выпускать два изделия. Предположим, что исполнители w_1 и w_2 снабжают всю организацию. Исполнители w_7 и w_8 реализуют всю продукцию. Исполнители w_3 и w_4 производят первое изделие. Исполнители w_5 и w_6 производят второе изделие. Тогда между исполнителями, производящими различные изделия, может отсутствовать взаимодействие. Для снабжения, производства и сбыта первого изделия необходимо управлять взаимодействием в группе $s_1=\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_7,w_8\}$. Аналогично, для снабжения, производства и сбыта второго изделия необходимо управлять взаимодействием в группе $s_2=\{w_1,w_2,w_5,w_6,w_7,w_8\}$.

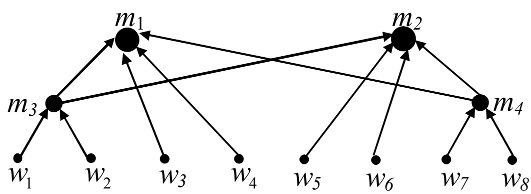

Рисунок 43. Пример иерархии управления двумя группами исполнителей

Если не требуется, чтобы все сотрудники были подчинены одному менеджеру, то иерархия, управляющая выпуском изделий, может выглядеть так, как показано на рисунке 43. В ней начальники отдела снабжения (менеджер m_3) и отдела сбыта (менеджер m_4) участвуют в выпуске обоих изделий. Они подчинены двум менеджерам m_1 и m_2, которые управляют соответственно выпуском первого и второго изделий. Менеджеру, управляющему выпуском изделия, непосредственно подчинены исполнители, которые это изделие производят.

Таким образом, можно ввести следующее определение.

Определение 12. *Ориентированный граф* $H = (N \cup M, E)$ *с множеством ребер подчиненности* $E \subseteq (N \cup M) \times M$ *назовем иерархией, управляющей группами исполнителей* $s_1, \ldots, s_l$*, если* H *ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдутся менеджеры, которые управляют группами* $s_1, \ldots, s_l$*. Через* $\Omega(s_1, \ldots, s_l)$ *обозначим множество всех таких иерархий.*

Затраты менеджеров и затраты иерархий из множества $\Omega(s_1, \ldots, s_l)$ могут описываться секционной функцией (см. определение 7 на странице 95) точно так же, как и затраты иерархий из $\Omega(N)$. Таким образом, можно поставить задачу об оптимальной иерархии, имеющей минимальные затраты среди всех иерархий из $\Omega(s_1, \ldots, s_l)$.

Если требуется наличие менеджера, которому подчинены все исполнители, то определение 12 также может иметь смысл. В этом случае добавим к набору $s_1, \ldots, s_l$ группу $s_{l+1} = N$. Тогда иерархия из $\Omega(s_1, \ldots, s_l, s_{l+1})$ будет удовлетворять условиям определения 1, то есть управлять всеми исполнителями. **Условие управления группами** $s_1, \ldots, s_l$ **в этом случае может означать, что обязательно должны быть созданы некоторые отделы, подразделения и т.п**.

В приведенном выше примере (см. рисунок 43) может потребоваться, чтобы в иерархии были начальники отделов снабжения и сбыта, и менеджеры, управляющие выпуском каждого из изделий. То есть в иерархии должны быть менеджеры, управляющие группами $s_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_7, w_8\}$, $s_2 = \{w_1, w_2, w_5, w_6, w_7, w_8\}$, $s_3 = \{w_1, w_2\}$, $s_4 = \{w_7, w_8\}$. Таким образом, можно рассмотреть множество иерархий $\Omega(s_1, \ldots, s_4)$ или $\Omega(s_1, \ldots, s_4, N)$, если необходим высший менеджер, управляющий всеми исполнителями.

Таким образом, несмотря на то, что определение 12 накладывает существенные ограничения, множество $\Omega(s_1, \ldots, s_l)$ остается весьма широким. Поэтому перебором оптимальная иерархия за разумное время может быть найдена только в простейших случаях. В связи с этим, необходимо создание методов, позволяющих при некоторых ограничениях найти оптимальную иерархию, которая управляет заданными группами.

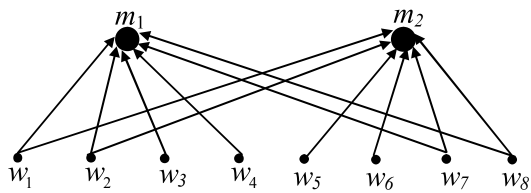

Рисунок 44. Двухуровневая иерархия управления несколькими группами исполнителей

Иерархию, управляющую группами $s_1,\ldots,s_l$, можно также интерпретировать следующим образом. В разделе 3.4 кратко описывалась модель обработки информации (Marschak и Radner (1972)). По n входам, соответствующим исполнителям, поступает некоторая информация. Менеджеры должны обработать информацию и найти управляющее воздействие, то есть вычислить некоторую функцию. При этом функция предполагается ассоциативной (например, сложение или взятие минимума), то есть неважно, в каком порядке проводить вычисления. При этом во всех известных моделях рассматривается вычисление одной функции от всех n переменных (см., например, работы Keren и Levhari (1983, 1989), Radner (1993), Van Zandt (1996)). Однако в реальной организации может потребоваться вычислять несколько воздействий, каждое из которых зависит от части переменных. Пусть, например, группа s_1 соответствует некоторому цеху. Тогда менеджеры должны получить информацию от исполнителей этого цеха и вычислить функцию. Вычисленное воздействие можно применить к цеху s_1. Аналогично, может потребоваться вычислять воздействия для цехов $s_2,\ldots,s_l$. С этой задачей как раз и справляются иерархии, управляющие группами $s_1,\ldots,s_l$. Оптимальная иерархия минимизирует некоторую функцию затрат, связанных с вычислениями. Как отмечает Radner (1992), на данный момент неизвестны методы поиска оптимальной иерархии, вычисляющей несколько функций. Поэтому представляют интерес методы, позволяющие решать подобную задачу хотя бы для частных случаев.

Если среди групп $s_1,\ldots,s_l$ нет пересекающихся, то задача об оптимальной иерархии, управляющей группами $s_1,\ldots,s_l$ распадается на l независимых задач. Действительно, у менеджеров, управляющих группами s_i и s_j, $i \neq j$ не может быть общих подчиненных, поскольку в этом случае группы s_i и s_j содержат общих исполнителей. То есть иерархия из $\Omega(s_1,\ldots,s_l)$ распадается на l независимых иерархий из множеств $\Omega(s_1),\ldots,\Omega(s_l)$. В этом случае достаточно решить l задач об оптимальной иерархии, управляющей одной группой. То есть задача полностью сводится к задаче, рассмотренной выше.

Если среди групп есть пересекающиеся, то задача значительно усложняется. Например, на рисунке 43 менеджеры m_1 и m_2 управляют группами $s_1=\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_7,w_8\}$ и $s_2=\{w_1,w_2,w_5,w_6,w_7,w_8\}$ соответственно. Группы пересекаются $s = s_1 \cap s_2 = \{w_1, w_2, w_7, w_8\}$. В иерархии $H \in \Omega(s_1, s_2)$ может быть менеджер, управляющий группой $s = s_1 \cap s_2$ и подчиненный обоим менеджерам m_1 и m_2. Также могут быть менеджеры, управляющие частями группы s и подчиненные менеджерам m_1 и m_2 (например, менеджеры m_3 и m_4 на рисунке 43). Менеджеры m_1 и m_2 могут управлять подчиненными им группами независимо друг от друга (с помощью подчиненных менеджеров, либо непосредственно, см. рисунок 44). Возможны также другие варианты иерархий. Таким образом, при построении иерархии управления одной группой необходимо учитывать, что некоторые менеджеры могут быть использованы в иерархии, управляющей другой группой, если это снижает затраты общей иерархии. В случае нескольких групп $s_1,\ldots,s_l$ задача еще более усложняется, поскольку структура пересечения этих групп может быть весьма сложной. Менеджеры, управляющие группами из $s_1 \cap \ldots \cap s_l$, могут подчиняться l менеджерам, которые управляют группами $s_1,\ldots,s_l$. Аналогично, **необходимо учитывать всевозможные пересечения групп $s_1,\ldots,s_l$** (подобных пересечений в общем случае $2^l - 1$).

Однако, несмотря на сложность задачи, некоторые из приведенных выше результатов удается обобщить для случая иерархий, управляющих несколькими группами.

Утверждение 15. *Для сужающей функции затрат существует оптимальная 2-иерархия* $H \in \Omega(s_1, \ldots, s_l)$, *управляющая группами* $s_1,\ldots,s_l$.

Доказательство утверждения 15 аналогично доказательству соответствующего утверждения для иерархии, управляющей одной группой (см. утверждение 7 на странице 106). Доказательство основано на следующем перестроении оптимальной иерархии. Если какой-либо менеджер m имеет трех и более непосредственных подчиненных $v_1,\ldots,v_k$, то нанимается новый непосредственный подчиненный m', который управляет двумя или более сотрудниками из $v_1,\ldots,v_k$. Менеджеру m при этом непосредственно подчинены оставшиеся сотрудники из $v_1,\ldots,v_k$ и менеджер m'. Сужающая функция затрат позволяет провести такое перестроение без увеличения затрат, то есть с сохранением оптимальности.

Доказательство в случае нескольких групп остается верным, поскольку мы лишь добавляем новых менеджеров, не удаляя имеющихся менеджеров, которые могут требоваться нескольким высшим менеджерам. Обратное утверждение – об оптимальности двухуровневой иерархии при расширяющей функции (см. утверждение 8) – будет неверным в случае нескольких групп. Например, при расширяющей функции на рисунке 43 подчинение исполнителей w_1 и w_2 непосредственно менеджеру m_1 приводит к меньшим затратам, чем найм менеджера m_3 и подчинение его менеджеру m_1. Однако менеджер m_3 необходим как менеджеру m_1, так и менеджеру m_2. Поэтому его удаление может привести к увеличению затрат даже в случае расширяющей функции.

Утверждение 15 позволяет для сужающих функций значительно упростить задачу поиска оптимальной иерархии, управляющей несколькими группами, поскольку достаточно рассмотреть лишь иерархии, в которых каждый менеджер имеет двух непосредственных подчиненных. Свойство сильного сужения (см. определение 11 на странице 116) позволяет еще более упростить задачу.

Утверждение 16. *Для сильно сужающей функции затрат существует оптимальная последовательная иерархия* $H \in \Omega(s_1, \ldots, s_l)$, *управляющая группами* $s_1, \ldots, s_l$.

Доказательство утверждения 16 аналогично доказательству соответствующего утверждения для иерархии, управляющей одной группой (см. утверждение 9 на странице 118). Доказательство также основано на последовательном перестроении иерархии. При перестроении могут добавляться новые менеджеры, но не могут удаляться менеджеры, которые уже имеются в иерархии (они могут быть необходимы нескольким высшим менеджерам). Поэтому доказательство утверждения 9 остается верным и в случае нескольких групп.

В силу утверждения 16 для сильно сужающей функции оптимальна последовательная иерархия с минимальными затратами, управляющая несколькими группами. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь иерархии, в которых каждый менеджер имеет двух непосредственных подчиненных, причем хотя бы один из них – исполнитель.

В работах Воронина и Мишина (2002b, 2003) описаны **алгоритмы поиска последовательной иерархии с минимальными затратами, управляющей несколькими группами исполнителей**. Для произвольной секционной функции порядок сложности алгоритма равен $n2^n3^l$, то есть сложность алгоритма экспоненциальна как по числу исполнителей n, так и по числу групп l. Тестирование алгоритма показывает, что в среднем его сложность значительно ниже при небольших n и l. Это позволяет за разумное время находить последовательную иерархию с минимальными затратами, если n и l не превосходят одного-двух десятков. Обычно невелико количество групп l, которыми необходимо управлять (например, число цехов не превышает десятка). Существенно ограничение по n, поскольку в крупной организации могут работать сотни и тысячи исполнителей. Рассмотрим частный случай, в котором сложность алгоритма значительно снижается.

Предположим, что исполнители одинаковы. То есть функция затрат зависит лишь от числа исполнителей в группах, но не от состава групп ($c(s_1,...,s_k)=c(|s_1|,...,|s_k|)$). Например, функции (I)-(V) (см. раздел 3.5) будут удовлетворять этому условию, если сложности всех исполнителей равны. Этот случай практически важен, поскольку рядовых исполнителей часто можно считать одинаковыми с точки зрения затрат менеджеров. Для одинаковых исполнителей в работах Воронина и Мишина (2002b, 2003) описана модификация алгоритма поиска последовательной иерархии с минимальными затратами, управляющей несколькими группами исполнителей. Сложность модификации алгоритма зависит только от числа групп *l*, но не от числа исполнителей *n*. Порядок сложности равен $2^{2l+1}3^l$. Модификация алгоритма для одинаковых исполнителей позволяет за разумное время находить иерархию с минимальными затратами, если число групп *l* не превосходит одного-двух десятков, независимо от количества исполнителей *n*.

Для сильно сужающей функции вышеуказанные алгоритмы позволяют найти оптимальную иерархию, управляющую несколькими группами.

В целом глава 3 показывает, что возможно аналитическое исследование класса секционных функций. Несмотря на то, что задача об оптимальной иерархии весьма сложна, в ряде случаев ее удалось решить, указав вид оптимальной иерархии. Причем методы решения могут быть применены к широким классам секционных функций. Это позволяет использовать теоретические методы для исследования практических задач, которые имеют различную содержательную интерпретацию. Области применения этих задач могут быть различными. Однако их можно решать одними и теми же формальными методами, что позволяет математически описывать многие эффекты, связанные с иерархиями.

Заключение

Исследование иерархий необходимо для решения практических задач управления организациями. В связи с этим в менеджменте иерархиям уделяется большое внимание. На данный момент собрано множество эмпирических фактов, позволяющих выдвигать различные предположения о связи вида оптимальной иерархии с областью деятельности, параметрами внешней среды, размером и «возрастом» организации и т.п. (см., например, Mintzberg (1979)). Поэтому весьма актуально построение математических моделей, в рамках которых возможно обоснование и систематизация этих фактов и предположений.

В ряде работ задача об оптимальной иерархии решается совместно с построением механизмов взаимодействия сотрудников. Поэтому для исследования модели накладывается ряд априорных ограничений (древовидность, непосредственное подчинение менеджеру сотрудников одного уровня, их однородность с точки зрения затрат менеджеров и т.п.). В настоящей работе исследована задача об оптимальной иерархии, в которой не накладываются столь жесткие ограничения, но и не моделируются механизмы взаимодействия сотрудников. Такой подход позволил во многих случаях создать методы поиска оптимальной иерархии. Разработанные теоретические методы могут быть использованы для исследования практических задач, которые имеют различную содержательную интерпретацию. В частности, в работе промоделированы многие эффекты, имеющие место в реальных организациях: зависимость вида оптимальной иерархии от нестабильности внешней среды, стандартизации, интенсивности технологических потоков, горизонтальной и вертикальной интеграции и т.п.

Таким образом, с помощью рассмотренных в работе секционных функций затрат[65] удается моделировать наблюдаемые на практике эффекты. Кроме того, класс секционных функций удается исследовать аналитически, что позволяет во многих случаях найти оптимальную иерархию. То есть, на наш взгляд, достигается удач-

[65] Затраты менеджера зависят только от групп, управляемых его непосредственными подчиненными.

ный компромисс между детальностью описания реальных эффектов и возможностью математического исследования. В связи с этим представляется перспективным дальнейшее развитие методов поиска оптимальной иерархии для секционных функций затрат. Упомянем несколько других актуальных направлений исследования.

1. Создание механизмов, обеспечивающих достижение общей цели экономической системы с минимальной суммарной заработной платой, равной затратам оптимальной иерархии (эти затраты минимальны по всем возможным иерархиям). В частности, могут представлять интерес соответствующие механизмы стимулирования.

В работе Мишина (2004a) построен механизм стимулирования, который при полной информации позволяет обеспечить минимальные выплаты, равные затратам. При неполной информации приходится рассчитывать на «худший случай», то есть компенсировать сотрудникам максимальные затраты, которые они могут нести с учетом информации, имеющейся у метацентра (например, владельца организации). Однако избыточное стимулирование позволяет в ряде ситуаций обеспечить устойчивость иерархии при росте затрат. При этом менеджер самостоятельно (за счет собственных ресурсов) перестраивает подчиненный фрагмент иерархии, позволяя организации «приспособиться» к изменениям, причем наиболее устойчивыми оказываются верхние уровни иерархии (см. Мишин (2004a)).

2. Создание динамических моделей оптимальной иерархии. С течением времени могут меняться параметры функции затрат, количество и состав исполнителей, условия их взаимодействия (технологическая сеть) и т.п. Поэтому иерархия может становиться неоптимальной. Однако перестроение иерархии обычно требует больших затрат. Таким образом, в динамических моделях необходимо находить компромисс между простотой перестроения и затратами менеджеров. То есть, в динамике оптимальной может оказаться иерархия, перестраивающаяся с небольшими затратами, даже если в ней затраты менеджеров не минимальны. В работе Мишина (2002b) введена метрика на множестве иерархий. Это позволило математически определить затраты на перестроение (реструктури-

зацию). С помощью метрики численно промоделировано динамическое поведение иерархии (Мишин (2002а, 2003а), Воронин, Мишин (2002а)). Однако на данный момент не известны аналитические методы решения динамической задачи.

В идеале развитие математического моделирования иерархий должно помочь решению практических задач построения эффективных организационных структур. В современной экономике подобные задачи очень важны. Хочется надеяться, что настоящая работа окажется полезной для их решения.

Приложение (доказательства формальных утверждений)

Доказательство леммы 1. Если для некоторого исполнителя $w \in N$ выполнено $w \in s_H(v)$, то w подчинен m, так как путь из w в v можно продолжить до пути из w в m, поскольку v подчинен m. То есть $w \in s_H(m)$. Следовательно $s_H(v) \subseteq s_H(m)$.

Если $w \in s_H(m)$, то из w существует путь в m, который проходит через вершину v_j для некоторого $1 \le j \le k$, поскольку только из этих вершин идут ребра в m. То есть $w \in s_H(v_j)$. Таким образом, $s_H(m) \subseteq s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$. Так как для любого $1 \le j \le k$ v_j подчинен m, то $s_H(v_j) \subseteq s_H(m)$. Поэтому выполнено равенство $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$. ■

Доказательство леммы 2. Пусть H – некоторое дерево. Предположим, что найдется менеджер m и два его непосредственных подчиненных v_1 и v_2, для которых $s_H(v_1) \cap s_H(v_2) \ne \varnothing$. Тогда существует исполнитель $w \in s_H(v_1) \cap s_H(v_2)$. Исполнитель w подчинен сотрудникам v_1 и v_2. Следовательно, найдутся два различных пути из w в m (один проходит через v_1, другой – через v_2). В некоторой вершине $v \in N \cup M$ эти пути расходятся, следовательно сотрудник v имеет не менее двух непосредственных начальников, что противоречит определению 2. Таким образом, в H непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами.

Докажем обратное утверждение методом индукции по числу исполнителей. Пусть в иерархии H непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей. Обозначим через m единственного менеджера, который по условию леммы не имеет начальников.

Если $n = |N| = 1$, то все менеджеры управляют одной и той же группой, состоящей из одного исполнителя. Если бы некоторый сотрудник имел двух непосредственных начальников, то существовали бы два различных пути от этого сотрудника к m. Эти пути сходятся в некоторой вершине, у которой таким образом как минимум два непосредственных подчиненных, которые управляют одной и той же группой. Противоречие. То есть у каждого сотрудника, кроме m, один непосредственный начальник. Значит H – дерево.

Предположим, что для некоторого $l \geq 2$ обратное утверждение верно при всех $n < l$. Пусть $|N| = l$. Выполнено $s_H(m)=N$, так как в иерархии имеется менеджер, управляющий всеми исполнителями, а все менеджеры подчинены m. Если у m один непосредственный подчиненный, то он управляет группой N. У него, в свою очередь, может быть один непосредственный подчиненный, но рано или поздно по такой цепи спустимся до менеджера m', которому непосредственно подчинены не менее двух сотрудников $v_1,\dots,v_k$, $k \geq 2$.

По условию леммы $s_H(v_i) \cap s_H(v_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Кроме того, по лемме 1 выполнено $N = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$. То есть $|s_H(v_i)| < |N| = l$ для всех $1 \leq i \leq k$. Обозначим через H_i граф, состоящий из v_i и всех его подчиненных. Пусть для некоторых $i \neq j$ v' – сотрудник иерархии H_i, а v'' – сотрудник иерархии H_j. Тогда $v' \neq v''$ и v' в H не может быть подчиненным v'', так как в этом случае $s_H(v') \subseteq s_H(v'') \subseteq s_H(v_j)$, что невозможно в силу $s_H(v') \subseteq s_H(v_i)$ и $s_H(v_i) \cap s_H(v_j) = \varnothing$. Итак графы $H_1,\dots,H_k$ не имеют общих вершин и ребер, идущих из одного графа в другой. В H_i единственная вершина v_i не имеет начальников. Следовательно, по индуктивному предположению H_i – дерево, управляющее исполнителями из $s_H(v_i)$, а v_i – корень этого дерева.

Любой сотрудник v иерархии H, за исключением m' и надстроенной над ним цепочки, входит в H_i для некоторого $1 \leq i \leq k$, так как v подчинен m, а следовательно и m'. Итак, иерархия H состоит из k независимых деревьев, из корней которых идут ребра в m', а над m' надстроена цепочка менеджеров вплоть до m. Следовательно, H – дерево, что и доказывает лемму. ■

Доказательство леммы 3. Рассмотрим множество из двух исполнителей, подчиненных менеджеру m: $\{w', w''\} \subseteq s_H(m)$.

Пусть для некоторого $1 \le j \le k$ выполнено $\{w', w''\} \subseteq s_H(v_j)$. Тогда w' и w'' подчинены одновременно v_j, то есть поток $f(w', w'')$ не входит во внутренний поток менеджера m.

Пусть для всех $1 \le j \le k$ выполнено $\{w', w''\} \not\subset s_H(v_j)$. Предположим, что w' и w'' подчинены одновременно некоторому подчиненному m' менеджера m, то есть $\{w', w''\} \subseteq s_H(m')$. Тогда m' не может быть непосредственным подчиненным m. Следовательно, найдется такое j, что m' подчинен v_j (путь из m' в m проходит через одного из непосредственных подчиненных m). Но тогда по лемме 1 $\{w', w''\} \subseteq s_H(m') \subseteq s_H(v_j)$. Противоречие. Следовательно, w' и w'' не подчинены одновременно ни одному из подчиненных менеджера m. То есть поток $f(w', w'')$ входит во внутренний поток менеджера m.

Итак, в сумму $\sum\limits_{\substack{\{w',w''\} \subseteq s_H(m), \\ \{w',w''\} \not\subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \le j \le k}} f(w', w'')$ входят внутренние потоки менеджера m и только они. ■

Доказательство леммы 4. По лемме 1 выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$. Удаление из этого равенства группы $s_H(v_1)$ не изменит $s_H(m)$ в силу $s_H(v_1) \subseteq s_H(v_2)$. Поэтому не изменится и внешний поток $F_H^{ext}(m)$. В выражении для внутреннего потока $F_H^{\text{int}}(m)$ (см. формулу (3)) берется сумма по всем $\{w', w''\} \subseteq s_H(m)$, для которых $\{w', w''\} \not\subset s_H(v_1), \ldots, \{w', w''\} \not\subset s_H(v_k)$. Условие $\{w', w''\} \not\subset s_H(v_2)$ автоматически влечет $\{w', w''\} \not\subset s_H(v_1)$. Поэтому удаление группы $s_H(v_1)$, то есть удаление условия $\{w', w''\} \not\subset s_H(v_1)$ не изменит $F_H^{\text{int}}(m)$. Следовательно, не изменится поток менеджера m и его затраты. То есть выполнено $c(s_H(v_2), \ldots, s_H(v_k)) = c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_k))$. Таким образом, справедливо неравенство, указанное в утверждении леммы. В базовой модели оно выполняется как равенство. В других случаях неравенство может выполняться строго. ■

Доказательство утверждения 1. Пусть два сотрудника v_1 и v_2 управляют в H_1 одной и той же группой $s_{H_1}(v_1) = s_{H_1}(v_2)$. В силу ацикличности v_1 и v_2 не могут быть одновременно подчинены друг другу. Не ограничивая общности, считаем, что v_2 не подчинен v_1. Рассмотрим непосредственного начальника m_1 сотрудника v_2. Если v_1 также непосредственно подчинен m_1, то по лемме 4 удаление ребра (v_2,m_1) не увеличит затраты менеджера m_1 и затраты всей иерархии. Если v_1 не является непосредственным подчиненным m_1, то заменим ребро (v_2,m_1) на (v_1,m_1). В силу $s_{H_1}(v_1) = s_{H_1}(v_2)$ затраты менеджера m_1 не изменятся, то есть не изменятся затраты иерархии. Итак, в обоих случаях ребро (v_2,m_1) может быть удалено. Действуя аналогичным образом, получим иерархию, в которой у сотрудника v_2 нет начальников. Тогда его можно удалить. При этом затраты не возрастут[66]. Продолжая подобные удаления, придем к иерархии H', в которой все сотрудники управляют различными группами, то есть выполнено условие (i). Затраты иерархии H' не превышают затрат H_1: $c(H') \le c(H_1)$.

Если в H' некоторый менеджер m_2 не имеет начальников и управляет группой $s_{H'}(m_2) \ne N$, то этого менеджера можно удалить. При этом затраты не возрастут. Продолжая аналогичные действия, придем к иерархии H'', в которой менеджеры, не имеющие начальников, управляют группой N. В силу определения 1 и условия (i)[67] в иерархии ровно один такой менеджер m.[68] Из любой вершины $v \ne m$ иерархии H'' выходит хотя бы одно ребро. Таким образом, из v можно построить путь, который в силу ацикличности иерархии закончится в m. Следовательно, все сотрудники органи-

[66] Определение 1 будет выполнено, так как максимальная группа N будет управляться некоторым менеджером (если v_2 управлял группой N, то после его удаления группой N будет управлять сотрудник v_1).
[67] Очевидно, что проведенные удаления менеджеров не нарушили условия (i).
[68] Удалить этого менеджера мы не можем, так как это нарушит определение 1 и граф перестанет быть иерархией, управляющей множеством исполнителей N.

зации подчинены m. То есть для H'' выполнены условия (i) и (ii). Затраты иерархии H'' не превышают затрат H', а следовательно и затрат H_1: $c(H'') \le c(H_1)$.

Предположим, что в H'' сотрудники v_3 и v_4 непосредственно подчинены одному менеджеру m_3, и сотрудник v_3 подчинен сотруднику v_4. Тогда $s_{H''}(v_3) \subseteq s_{H''}(v_4)$ и на основании леммы 4 можно удалить ребро (v_3,m_3), не увеличивая затраты менеджера m_3 и затраты всей иерархии. У сотрудника v_3 при этом останется хотя бы один начальник, так как v_3 подчинен v_4. Продолжая подобные действия, получим в итоге иерархию H_2, удовлетворяющую условию (iii). Проведенные удаления ребер не изменили групп, которые подчинены менеджерам, а также не увеличили число менеджеров без начальников. То есть полученная иерархия H_2 удовлетворят условиям (i), (ii), (iii). Кроме того, затраты иерархии H_2 не превышают затрат иерархии H'', а следовательно и затрат H_1: $c(H_2) \le c(H_1)$.

Все перестроения, описанные в доказательстве, не увеличивают числа непосредственных подчиненных менеджера. Поэтому если H_1 – r-иерархия, то H_2 также будет r-иерархией, удовлетворяющей условиям (i), (ii), (iii).

Любое дерево по определению удовлетворяет условиям (ii) и (iii).[69]

Пусть H_1 – дерево. Предположим, что в нем найдется менеджер m_4 с единственным непосредственным подчиненным v. В этом случае выполнено $s_{H_1}(v) = s_{H_1}(m_4)$. Если у m_4 имеется непосредственный начальник m_5, то в силу условия (iii) сотрудник v не подчинен m_5 непосредственно. Поэтому можно подчинить сотрудника v менеджеру m_5, а менеджера m_4 удалить. Группы, подчиненные оставшимся менеджерам, не изменятся, поэтому не изменятся их затраты. Если у m_4 нет начальников, то m_4 можно удалить. В этом

[69] В дереве все пути заканчиваются в одном менеджере, у которого нет начальников. Следовательно, этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и исполнители. Если один непосредственный подчиненный менеджера управляет другим, то у последнего как минимум два непосредственных начальника, что противоречит определению дерева.

случае начальников не будет у сотрудника v. В полученной иерархии один менеджер не имеет начальников, все остальные имеют ровно одного непосредственного начальника. То есть иерархия осталась деревом (см. определение 2). Затраты полученного дерева не превышают затрат H_1. Продолжая подобные удаления, придем к дереву H_2, в котором у каждого менеджера не менее двух непосредственных подчиненных. Кроме того, затраты дерева H_2 не превышают затрат дерева H_1: $c(H_2) \le c(H_1)$. Осталось доказать, что для H_2 выполнено условие (i).

Пусть m – менеджер без начальников в дереве H_2. Менеджер m управляет группой N. Менеджер m имеет $k \ge 2$ непосредственных подчиненных $v_1,\ldots,v_k$. По лемме 2 они управляют непересекающимися группами. Следовательно, при $i \ne j$ сотрудник v_j и его подчиненные не могут управлять сотрудником v_i и его подчиненными. Кроме того, подчиненные сотрудника v_i и подчиненные сотрудника v_j управляют разными группами, поскольку группы $s_{H_2}(v_1),\ldots,s_{H_2}(v_k)$ не пересекаются. Осталось показать, что в каждом из k независимых поддеревьев с корнями $v_1,\ldots,v_k$ менеджеры управляют различными группами. Сотрудникам $v_1,\ldots,v_k$ подчинены меньшие группы, чем группа N, подчиненная высшему менеджеру m. То есть можно воспользоваться методом математической индукции по размеру группы, которая управляется корнем дерева (по аналогии с доказательством леммы 2).

Таким образом, H_2 – дерево, которое удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii). Описанные выше перестроения дерева не изменяют числа непосредственных подчиненных менеджера. Поэтому если H_1 – r-дерево, то H_2 также будет r-деревом, которое удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii). ■

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим некоторую иерархию $H = (M \cup N, E) \in \Omega(N)$. Пусть $M=\{m_1,\ldots,m_q\}$ – множество менеджеров этой иерархии. Обозначим через $x_i = F_H^{\text{int}}(m_i) + F_H^{ext}(m_i)$ поток менеджера m_i, $1 \le i \le q$. Через x обозначим сумму всех потоков: $x = \sum_{\{w',w''\} \subseteq N} f(w',w'') + \sum_{w \in N} f(w, w_{env})$.

Каждый поток внутри технологической сети управляется по крайней мере одним менеджером. В управлении потоками между сетью и внешней средой участвует, по крайней мере, высший менеджер. Следовательно, верно неравенство $x_1 + \ldots + x_q \geq x$.

В двухуровневой иерархии имеется единственный менеджер *m*, который управляет всеми потоками внутри технологической сети и участвует в управлении потоками между сетью и внешней средой. То есть затраты двухуровневой иерархии равны $\varphi(x)$. Затраты иерархии *H* равны $\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_q)$. В силу субаддтивности имеем:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_q) \geq \varphi(x_1 + x_2) + \varphi(x_3) + \ldots + \varphi(x_q) \geq \ldots \geq \varphi(x_1 + \ldots + x_q).$$

В силу $x_1 + \ldots + x_q \geq x$ и монотонности функции $\varphi(\cdot)$ имеем:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_q) \geq \varphi(x).$$

То есть затраты двухуровневой иерархии не превосходят затрат любой иерархии. Следовательно, двухуровневая иерархия оптимальна, что и доказывает утверждение. ■

Доказательство леммы 5. По определению вогнутой функции для любых $z_1, z_2 \in R_+$ и для любого $\gamma \in [0;1]$ выполнено неравенство $\varphi(\gamma z_1 + (1-\gamma)z_2) \geq \gamma\varphi(z_1) + (1-\gamma)\varphi(z_2)$. Докажем, что для любых $x, y \in R_+$ выполнено $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Для $x=y=0$ неравенство очевидно. Положим $z_1=0$, $z_2=x+y$. Рассматривая поочередно $\gamma = y/(x+y)$ и $\gamma = x/(x+y)$, докажем справедливость следующих неравенств:

$$\varphi(x) \geq \varphi(0)y/(x+y) + \varphi(x+y)x/(x+y);$$

$$\varphi(y) \geq \varphi(0)x/(x+y) + \varphi(x+y)y/(x+y).$$

Сложим неравенства: $\varphi(x) + \varphi(y) \geq \varphi(0) + \varphi(x+y) \geq \varphi(x+y)$. То есть для однокомпонентных потоков выпуклая функция субаддитивна, что и доказывает лемму. ■

Доказательство утверждения 3. Пусть $M=\{m_1,\ldots,m_q\}$ – множество менеджеров, которые управляют всеми потоками симметричной производственной линии с минимальными суммарными затратами. Менеджеры из *M* могут непосредственно управлять исполнителями, либо могут быть связаны более сложной структурой подчинения. То есть ниже не предполагаем, что менеджеры из M связаны единой иерархией.

Обозначим через k_i количество внутренних потоков, которыми управляет менеджер m_i, $1 \le i \le q$. Обозначим через l_i количество внешних потоков, в управлении которыми участвует менеджер m_i. Тогда суммарный внутренний поток менеджера m_i равен $F^{\text{int}}(m_i) = \lambda k_i$, внешний поток равен $F^{ext}(m_i) = \lambda l_i$. Таким образом, затраты менеджера m_i равны $\varphi((k_i + l_i)\lambda)$. Затраты всех менеджеров из M составят $\varphi((k_1 + l_1)\lambda) + \ldots + \varphi((k_q + l_q)\lambda)$.

Любой менеджер m_i участвует в управлении по меньшей мере двумя внешними потоками. Действительно, пусть $w_k \in N$ – исполнитель с наименьшим номером, подчиненный менеджеру m_i. Тогда поток $f(w_{k-1},w_k)$ (или $f(w_{env},w_1)$ при k=1) будет внешним для менеджера m_i. Аналогично можно рассмотреть исполнителя с наибольшим номером. То есть $l_i \ge 2$.

Рассмотрим $n-1$ потоков $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \le i \le n$. Каждый такой поток управляется одним из менеджеров $m_1,\ldots,m_q$. То есть каждый поток будет внутренним по крайней мере для одного из менеджеров. Таким образом, выполнено неравенство $k_1 + \ldots + k_q \ge n-1$. Кроме того, $k_i \le n-1$.

Построим дерево $H = (N \cup M', E')$ следующим образом. В начале менеджеров нет и каждый из n исполнителей должен быть непосредственно подчинен ровно одному менеджеру. Менеджеру m_1' непосредственно подчиним k_1+1 исполнителя, идущих в цепи подряд, начиная с первого. То есть $s_H(m_1') = \{w_1,\ldots,w_{k_1+1}\}$. Менеджер m_1' и каждый из исполнителей $w_{k_1+2},\ldots,w_n$ должны быть непосредственно подчинены ровно одному менеджеру. Таким образом, после первого шага остались неподчиненными $n-k_1$ сотрудников. Менеджеру m_2' непосредственно подчиним менеджера m_1' и k_2 исполнителей $w_{k_1+2},\ldots,w_{k_1+k_2+1}$. Таким образом, после второго шага остались неподчиненными $n-k_1-k_2$ сотрудников. Продолжая подобные действия, можно придти к двум результатам:

1. При $k_1 + \ldots + k_q = n - 1$ будут назначены $q' = q$ менеджеров. Причем менеджеру m'_q будет непосредственно подчинен менеджер m'_{q-1} и k_q исполнителей $w_{k_1+\ldots+k_{q-1}+2}, \ldots, w_n$, еще оставшихся неподчиненными.

2. При $k_1 + \ldots + k_q > n - 1$ будут назначены $q' \le q$ менеджеров, причем последнему менеджеру $m'_{q'}$ будет непосредственно подчинен менеджер $m'_{q'-1}$ и не более $k_{q'}$ исполнителей, еще оставшихся неподчиненными.

В обоих случаях менеджер $m'_{q'}$ будет управлять всеми исполнителями. То есть получили дерево $H \in \Omega(N)$. По построению каждый менеджер дерева управляет группой исполнителей, которые идут в цепи последовательно. Рассмотрим менеджера m'_i, $1 \le i \le q'$. Обозначим всех его непосредственных подчиненных $v_1, \ldots, v_j$. По лемме 2 $v_1, \ldots, v_j$ управляют попарно непересекающимися группами. По лемме 1 $s_H(m'_i) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_j)$. Таким образом, управляемый менеджером m'_i участок цепи $s_H(m'_i)$ разбивается на части $s_H(v_1), \ldots, s_H(v_j)$. Тогда менеджер m'_i управляет $j-1$ внутренним потоком и участвует в управлении двумя внешними потокам. Затраты менеджера m'_i равны $\varphi((j+1)\lambda)$. Менеджер m'_i имеет не более $k_i + 1$ непосредственного подчиненного. Поэтому затраты менеджера m'_i не превосходят величины $\varphi((k_i + 2)\lambda)$. Таким образом выполнено:

$$c(H) \le \varphi((k_1 + 2)\lambda) + \ldots + \varphi((k_q + 2)\lambda) \le \varphi((k_1 + l_1)\lambda) + \ldots + \varphi((k_q + l_q)\lambda).$$

Дерево H может содержать меньше q менеджеров. В силу неотрицательности функции затрат дополнительные слагаемые не могут уменьшить затраты. Учитывая оценку $\varphi((k_i + 2)\lambda)$ затрат менеджера m'_i, докажем первое неравенство. Второе неравенство справедливо в силу монотонности функции затрат и условия $l_i \ge 2$.

Таким образом, в построенном дереве H не больше менеджеров, чем в M, причем затраты менеджеров дерева не превосходят затраты соответствующих менеджеров M. То есть построено дерево, затраты которого не превышают суммарных затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии.

Пусть $\varphi(\cdot)$ – выпуклая функция. Для каждого менеджера m_i' дерева H через k_i' обозначим количество непосредственных подчиненных, $1 \le i \le q'$. Если найдутся два менеджера, у которых число непосредственных подчиненных отличается более, чем на единицу, то для некоторых $1 \le i, j \le q'-1$ выполнено $k_i' + 1 < k_j'$. При описанном выше построении дерева мы можем назначать менеджеров $m_1', \ldots, m_{q'}'$ в любом порядке. Их затраты не зависят от порядка назначения. То есть первым можно назначить менеджера m_i' с k_i' непосредственными подчиненными, а вторым можно назначить менеджера m_j' с k_j' непосредственными подчиненными. Всех остальных менеджеров назначим в произвольном порядке. Таким образом, в новом дереве числа $k_1',...,k_{q'}'$ будут переставлены. То есть в новом дереве (после перестановки) выполнено неравенство $k_1' + 1 < k_2'$. По построению дерева менеджеру m_2' непосредственно подчинен исполнитель, соседний с группой $s_H(m_1')$. Тогда можно переподчинить этого исполнителя менеджеру m_1'. Это по-прежнему приведет к дереву, в котором каждый менеджер управляет группой исполнителей, которые идут в цепи последовательно. Изменились только затраты менеджеров m_1' и m_2', у которых теперь $k_1' + 1$ и $k_2' - 1$ непосредственных подчиненных. Ниже доказано, что затраты не увеличились. Таким образом, можно продолжить аналогичные переподчинения. В результате получим дерево, в котором количество непосредственных подчиненных у менеджеров m_1' и m_2' одинаково или отличается на единицу. Кроме того, уменьшился «разброс» величин $k_1',...,k_{q'}'$ (например, среднеквадратичное отклонение). Продолжая подобные действия, построим в итоге дерево, в котором у различных менеджеров количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу. Затраты полученного дерева не превышают затрат исходного дерева. То есть выполнено условие утверждения.

Для доказательства утверждения осталось показать, что выполнено $\varphi((k_1'+2)\lambda)+\varphi(k_2'\lambda)\le\varphi((k_1'+1)\lambda)+\varphi((k_2'+1)\lambda)$. Обозначим $z_1=k_1'+1$, $z_2=k_2'+1$. По определению выпуклой функции для любых $z_1,z_2\in R_+$ и для любого $\gamma\in[0;1]$ выполнено неравенство $\varphi((\gamma z_1+(1-\gamma)z_2)\lambda)\le\gamma\varphi(z_1\lambda)+(1-\gamma)\varphi(z_2\lambda)$.

Положим $\gamma_1=(z_2-z_1-1)/(z_2-z_1)$, $\gamma_2=1/(z_2-z_1)$. Имеем, $0<\gamma_1,\gamma_2<1$, $\gamma_1+\gamma_2=1$. Кроме того, $\gamma_1 z_1+(1-\gamma_1)z_2=z_1+1$, $\gamma_2 z_1+(1-\gamma_2)z_2=z_2-1$. Подставляя значения γ_1,γ_2 в неравенство, получим:

$$\varphi((z_1+1)\lambda)\le\gamma_1\varphi(z_1\lambda)+(1-\gamma_1)\varphi(z_2\lambda),$$

$$\varphi((z_1-1)\lambda)\le\gamma_2\varphi(z_1\lambda)+(1-\gamma_2)\varphi(z_2\lambda).$$

Складывая неравенства, будем иметь:

$$\varphi((z_1+1)\lambda)+\varphi((z_2-1)\lambda)\le\varphi(z_1\lambda)+\varphi(z_2\lambda),$$

что и доказывает требуемое неравенство. ■

Доказательство утверждения 4. В формуле (12) затраты дерева можно минимизировать выбором *r*, для которого достигается минимальное значение функции $\xi(r)=(r+1)^\alpha/(r-1)$. Вычислив производную по *r*, получим следующее выражение:

$$\xi'(r)=[\alpha(r+1)^{\alpha-.1}(r-1)-(r+1)^\alpha]/(r-1)^2=$$

$$=(r+1)^{\alpha-1}[(\alpha-1)r-\alpha-1]/(r-1)^2.$$

В силу $\alpha>1$ выполнено $\xi'(r)<0$ при $r<(\alpha+1)/(\alpha-1)$ и $\xi'(r)>0$ при $r>(\alpha+1)/(\alpha-1)$. То есть $r_0=(\alpha+1)/(\alpha-1)$ – единственная точка минимума функции $\xi(r)$. r должно быть целым, поэтому функцию $\xi(r)$ минимизирует одно из двух целых чисел: либо $r_-=\lfloor r_0\rfloor$ – максимальное целое число, не превышающее r_0, либо $r_+=\lceil r_0\rceil$ – минимальное целое число, не меньшее r_0. Таким образом, при $\xi(r_-)<\xi(r_+)$ минимум $\xi(r)$ достигается в $r_*=r_-$, при $\xi(r_-)\ge\xi(r_+)$ минимум $\xi(r)$ достигается в $r_*=r_+$.

Итак, функцию $\xi(r)$ минимизирует величина r_*, равная одному из двух целых значений r_- и r_+ ближайших к $(\alpha+1)/(\alpha-1)$. Если $(\alpha+1)/(\alpha-1)$ – целое число, то $r_* = r_- = r_+$.

Поскольку r_* – минимум $\xi(r)$, то *для любого целого* $r \ge 1$ *имеем* $\xi(r) \ge \xi(r_*)$.

Пусть $n-1$ кратно r_*-1. Рассмотрим дерево H, в котором у каждого менеджера r_* непосредственных подчиненных, и каждый менеджер управляет группой исполнителей, идущих в цепи последовательно. Тогда согласно формуле (12) общее количество менеджеров H составит $(n-1)/(r_*-1)$, а затраты составят:

$$(r_*+1)^\alpha \lambda^\alpha (n-1)/(r_*-1) = (n-1)\lambda^\alpha \xi(r_*). \qquad (*)$$

Таким образом, затраты дерева H определяются формулой (12) с $r=r_*$, то есть формулой (*). Покажем, что при любом n затраты оптимальной иерархии не могут быть ниже величины (*). Это позволит показать, что H – оптимальная иерархия при $n-1$ кратном r_*-1. Кроме того, в силу утверждения 3 затраты оптимальной иерархии не превышают затрат любых менеджеров, управляющих потоками производственной линии. Следовательно, при произвольном n формула (12) с $r=r_*$ будет нижней оценкой затрат на управление всеми потоками линии.

Итак, для доказательства утверждения осталось показать, что при любом n затраты оптимальной иерархии не меньше (*). В силу $\alpha > 1$ функция затрат – выпуклая. В соответствии с утверждением 3 с учетом выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ найдется оптимальное дерево H^*. В H^* у различных менеджеров количество непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу. Кроме того, каждый менеджер H^* управляет группой исполнителей, идущих в цепи последовательно. Пусть $m_1,\ldots,m_q$ – менеджеры H^*. Тогда у $q_1>0$ менеджеров r непосредственных подчиненных, а у q_2 менеджеров $r+1$ непосредственный подчиненный, $q_1+q_2=q$, $2 \le r \le n$. По формуле (9) имеем:

$$(r-1)q + q_2 = n-1. \qquad (**)$$

Таким образом, $q = (n-1)/(r-1) - q_2/(r-1)$. В соответствии с формулой (11) затраты q_1 менеджеров равны $q_1(r+1)^\alpha \lambda^\alpha$, а затраты q_2 менеджеров равны $q_2(r+2)^\alpha \lambda^\alpha$. То есть затраты дерева равны:

$$c(H^*) = [q_1(r+1)^\alpha + q_2(r+2)^\alpha]\lambda^\alpha = [(q-q_2)(r+1)^\alpha + q_2(r+2)^\alpha]\lambda^\alpha =$$

$$= [(\frac{n-1}{r-1} - \frac{rq_2}{r-1})(r+1)^\alpha + q_2(r+2)^\alpha]\lambda^\alpha =$$

$$= [(n-1)\xi(r) + q_2((r+2)^\alpha - r(r+1)^\alpha/(r-1))]\lambda^\alpha.$$

Если $(r+2)^\alpha - r(r+1)^\alpha/(r-1) \ge 0$, то в силу $\xi(r) \ge \xi(r_*)$ имеем $c(H^*) \ge (n-1)\lambda^\alpha \xi(r_*)$. То есть затраты оптимальной иерархии не меньше (*).

Осталось рассмотреть случай $(r+2)^\alpha - r(r+1)^\alpha/(r-1) < 0$. Найдем нижнюю оценку $c(H^*)$. Для этого вычислим верхнюю оценку q_2. Из (**) имеем $q_2 = n-1-(r-1)q$. Максимум правой части достигается при минимальном q. С учетом $q \ge q_2$ можно записать $q_2 \le n-1-(r-1)q_2$. То есть $q_2 \le (n-1)/r$. Подставим эту оценку в выражение для $c(H^*)$:

$$c(H^*) \ge [(n-1)\xi(r) + \frac{n-1}{r}((r+2)^\alpha - r(r+1)^\alpha/(r-1))]\lambda^\alpha =$$

$$= [(n-1)\xi(r) - (n-1)\xi(r) + (n-1)(r+2)^\alpha/r]\lambda^\alpha = (n-1)\xi(r+1)\lambda^\alpha.$$

Так как r_* – минимум функции $\xi(\cdot)$ по всем целым $r \ge 1$, то $\xi(r+1) \ge \xi(r_*)$. Следовательно $c(H^*) \ge (n-1)\lambda^\alpha \xi(r_*)$. То есть затраты оптимальной иерархии не меньше (*).

Итак, при любом n затраты оптимальной иерархии не меньше (*), что и доказывает утверждение. ■

Доказательство утверждения 5. Рассмотрим оптимальную иерархию $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$, управляющую функционально связанными производственными линиями. В соответствии с разделом 2.6 (см. функцию затрат (26) на странице 76) в H любой продуктовый поток управляется дивизиональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием департаментов. Любой функциональный поток управляется функциональным менеджером или стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов.

Предположим, что хотя бы в одной производственной линии N_i продуктовый поток $f(w_{i,j},w_{i,j+1})$ не управляется дивизиональным менеджером. Тогда этот поток должен управляться стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием департаментов j и $j+1$. То есть в H должны быть сформированы департаменты j и $j+1$, и некоторый стратегический менеджер должен управлять всеми продуктовыми потоками между ними. Обозначим все такие индексы j через $j_1,j_2,\ldots,j_{n_1}$. Здесь n_1 – количество индексов j, для которых хотя бы в одной производственной линии N_i поток $f(w_{i,j},w_{i,j+1})$ не управляется дивизиональным менеджером, $0 \le n_1 \le n-1$. При $n_1=0$ все потоки управляются дивизиональными менеджерами. При $n_1=n-1$ для всех $1 \le j \le n-1$ поток $f(w_{i,j},w_{i,j+1})$ не управляется дивизиональным менеджером хотя бы в одной производственной линии N_i. Иерархия H должна содержать следующих менеджеров:

1. Рассмотрим случай $n_1>0$. Если индексы $j_1,j_2,\ldots,j_{n_1}$ идут подряд, то в H должен быть сформирован как минимум n_1+1 департамент. Если индексы идут не подряд, то количество необходимых департаментов должно быть еще больше (вплоть до $2n_1$). Таким образом, необходимо сформировать не менее n_1+1 департаментов. Каждый департамент управляет функциональной линией из l исполнителей с интенсивностью потоков θ. С учетом формулы (21) *затраты функциональных менеджеров не меньше следующей величины*:

$$x_1 = (n_1+1)(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha)(r_*+1)^\alpha/(r_*-1).$$

Если $n_1=0$, то оценка затрат x_1 ниже использоваться не будет.

2. Если $n_1>0$, то согласно пункту 1 в иерархии H имеется n_1+1 департамент. Если индексы $j_1,j_2,\ldots,j_{n_1}$ идут подряд, то начальники этих департаментов связаны линией продуктовых потоков интенсивности $l\lambda$. Этими потоками (то есть взаимодействием департаментов) должны управлять стратегические менеджеры. С учетом

формулы (25) минимальные затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов, равны:

$$x_2 = n_1((l\lambda)^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1).$$

Если индексы $j_1, j_2, \ldots, j_{n_1}$ идут не подряд, то их можно разбить на наборы индексов, идущих подряд. Обозначим через $k_1, \ldots, k_t$ количество индексов в каждом наборе, $k_1 + \ldots + k_t = n_1$. Первому набору соответствует k_1+1 департамент, следовательно в формуле затрат x_2 величина n_1 изменится на k_1. Для второго набора n_1 изменится на k_2, и так далее. Сложив затраты всех наборов, получим величину x_2. Таким образом, x_2 – *минимальная величина затрат стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием департаментов*. Если $n_1=0$, то $x_2=0$ – также минимальная величина затрат.

3. При $n_1 < n-1$ внутри каждой производственной линии имеется не менее $n-1-n_1$ продуктовых потоков, которые управляются дивизиональными менеджерами иерархии H. Если все эти потоки идут подряд, то дивизиональные менеджеры управляют участком производственной линии, внутри которого содержится не менее чем $n-1-n_1$ продуктовых потока. То есть участок состоит не менее чем из $n-n_1$ исполнителей. Такие участки имеются в каждой из l производственных линий. Интенсивность каждого потока равна λ. С учетом формулы (19) затраты дивизиональных менеджеров не меньше следующей величины:

$$x_3 = l(n - n_1 - 1)(\lambda^{\alpha} + c_0^{\alpha})(r_* + 1)^{\alpha} / (r_* - 1).$$

Если вышеуказанные потоки идут не подряд, то их можно разбить на наборы потоков, идущих подряд. Обозначим через $k_1, \ldots, k_t$ количество потоков в каждом наборе, $k_1 + \ldots + k_t = n-1-n_1$. Первому набору соответствует участок производственной линии из k_1+1 исполнителя, следовательно в формуле затрат x_3 величина $n-n_1-1$ изменится на k_1. Для второго набора $n-n_1-1$ изменится на k_2, и так далее. Сложив затраты всех наборов, получим величину x_3. Таким образом, x_3 – *минимальная величина затрат дивизиональных менеджеров*. Если $n_1=n-1$, то $x_3=0$ – также минимальная величина затрат.

Аналогичные рассуждения можно проделать и для функциональных потоков. Повторим их кратко. Предположим, что хотя бы в одной функциональной линии N^j функциональный поток

$f(w_{i,j},w_{i+1,j})$ не управляется функциональным менеджером. Тогда этот поток должен управляться стратегическим менеджером, управляющим взаимодействием дивизионов i и i+1. То есть в H должны быть сформированы дивизионы i и i+1, и некоторый стратегический менеджер должен управлять всеми функциональными потоками между ними. Обозначим l_1 – количество индексов i, для которых хотя бы в одной функциональной линии N^j поток $f(w_{i,j},w_{i+1,j})$ не управляется функциональным менеджером, $0 \le l_1 \le l-1$. Тогда иерархия H должна содержать следующих менеджеров:

1. Рассмотрим случай l_1>0. В H должен быть сформирован как минимум l_1+1 дивизион. Каждый дивизион управляет производственной линией из n исполнителей с интенсивностью потоков λ. С учетом формулы (19) *затраты дивизиональных менеджеров не меньше следующей величины*:

$$y_1 = (l_1+1)(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)(r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) .$$

Если l_1=0, то оценка затрат y_1 ниже использоваться не будет.

2. Если l_1>0, то согласно пункту 1 в иерархии H имеется l_1+1 дивизион. Начальники дивизионов связаны линией функциональных потоков интенсивности $n\theta$. С учетом формулы (23) *затраты стратегических менеджеров, управляющих взаимодействием дивизионов, не меньше следующей величины*:

$$y_2 = l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)(r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) .$$

Если l_1=0, то y_2=0 – также минимальная величина затрат.

3. При l_1<l–1 внутри каждой из n функциональных линий имеется l–1–l_1 функциональных потоков, которые управляются функциональными менеджерами иерархии H. Если все эти потоки идут подряд, то функциональные менеджеры управляют участком функциональной линии, внутри которого содержится не менее чем l–1–l_1 функциональных потока. То есть участок состоит не менее чем из l–l_1 исполнителей. Такие участки имеются в каждой из n функциональных линий. Интенсивность каждого потока равна θ. С учетом формулы (21) *затраты функциональных менеджеров не меньше следующей величины*:

$$y_3 = n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha)(r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) .$$

Если вышеуказанные потоки идут не подряд, то рассуждения аналогичны рассуждениям для величины x_3. Если $l_1=l-1$, то $y_3=0$ – также минимальная величина затрат.

Таким образом, суммарные затраты стратегических менеджеров иерархии H не меньше x_2+y_2. Также получены две нижние оценки x_1 и y_3 затрат функциональных менеджеров и две нижние оценки y_1 и x_3 затрат дивизиональных менеджеров. Следовательно, можно записать:

$$c(H) \geq x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \text{ и } c(H) \geq x_1 + x_2 + y_1 + y_2 . \qquad (*)$$

Оценкой $c(H) \geq x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ можно пользоваться только в случае $n_1>0$ и $l_1>0$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что в одном из выражений (*) правая часть не меньше затрат дивизиональной, функциональной или матричной иерархии. В соответствии с формулами (27), (28), (29) выпишем затраты этих иерархий:

$$c(H_{divisional}) = [l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)](r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) ,$$

$$c(H_{functional}) = [n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)](r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) ,$$

$$c(H_{matrix}) = [l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha)](r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1) .$$

Ниже при доказательстве неравенств не будем записывать множитель $(r_* + 1)^\alpha / (r_* - 1)$, поскольку он входит во все выражения и не влияет на выполнение неравенств. По очереди рассмотрим случаи, при которых минимальны затраты матричной, дивизиональной и функциональной иерархии. В силу (*) используем оценку $c(H) \geq x_2 + x_3 + y_2 + y_3$.

1. Предположим, что выполнено $c(H_{matrix}) \leq c(H_{divisional})$ и $c(H_{matrix}) \leq c(H_{functional})$. То есть выполнены следующие неравенства $((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \geq n(\theta^\alpha + c_0^\alpha)$ и $((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \geq l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$. Тогда выпишем неравенство $x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \geq c(H_{matrix})$:

$$n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + l(n - n_1 - 1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) +$$
$$+ n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \geq l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha).$$

Для доказательства неравенства достаточно подставить в левую часть $((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \geq n(\theta^\alpha + c_0^\alpha)$ и $((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \geq l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$.

2. Предположим, что выполнено $c(H_{matrix}) \le c(H_{divisional})$ и $c(H_{matrix}) \ge c(H_{functional})$. То есть выполнены следующие неравенства $((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \ge n(\theta^\alpha + c_0^\alpha)$ и $l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) \ge ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)$. Тогда выпишем неравенство $x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \ge c(H_{functional})$:

$$n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + l(n - n_1 - 1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) +$$
$$+ n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Для доказательства неравенства достаточно подставить в левую часть $((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \ge n(\theta^\alpha + c_0^\alpha)$ и $l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) \ge ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)$.

3. Предположим, что выполнено $c(H_{matrix}) \ge c(H_{divisional})$ и $c(H_{matrix}) \le c(H_{functional})$. То есть выполнены следующие неравенства $n(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)$ и $((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$. Тогда выпишем неравенство $x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \ge c(H_{divisional})$:

$$n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + l(n - n_1 - 1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) +$$
$$+ n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Для доказательства неравенства достаточно подставить в левую часть $n(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)$ и $((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)$.

Осталось рассмотреть случай $c(H_{matrix}) > c(H_{divisional})$ и $c(H_{matrix}) > c(H_{functional})$. То есть ниже считаем выполненными следующие неравенства:

$$n(\theta^\alpha + c_0^\alpha) > ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha),\ l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) > ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha). \qquad (**)$$

1. Рассмотрим случай $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$.

а) В силу (*) имеем $c(H) \ge x_2 + x_3 + y_2 + y_3$. Выпишем неравенство $x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \ge c(H_{divisional})$ подробно:

$$n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + l(n - n_1 - 1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) +$$
$$+ n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа со вторым слева, а второе справа – с третьим слева:

$$n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + n(l - l_1 - 1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha)n_1 + (l - l_1 - 1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа с первым слева, а второе слева – со вторым справа, получим следующее неравенство:

$$(l - l_1 - 1)[n(\theta^\alpha + c_0^\alpha) - ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)] \ge n_1[l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) - ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)].$$

В силу $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ можно записать:

$$l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \le n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Отсюда можно получить нижнюю оценку выражения, приведенного в квадратной скобке в левой части неравенства. Оценка имеет следующий вид $(n-1)[l(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) - ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)]/(l-1)$. Подставим эту оценку в неравенство вместо квадратной скобки слева:

$$(l - l_1 - 1)(n-1) \ge (l-1)n_1.$$

Выражение в квадратных скобках сократилось в силу его неотрицательности (см. (**)). То есть при $(l - l_1 - 1)/(l-1) \ge n_1/(n-1)$ выполнено $c(H) \ge c(H_{divisional})$.

b) Рассмотрим случай $(l - l_1 - 1)/(l-1) < n_1/(n-1)$. Если n_1=0 или l_1=0, то это условие неверно, поскольку $l_1 \le l - 1$ и $n_1 \le n - 1$. Поэтому в рассматриваемом случае n_1>0 и l_1>0, то есть в силу (*) можно использовать оценку $c(H) \ge x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

Выпишем неравенство $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \ge c(H_{divisional})$ подробно:

$$(n_1 + 1)(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + (l_1 + 1)(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \ge l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа с третьим слева, а второе справа – с четвертым слева:

$$(n_1 + 1)(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \ge \\ \ge (l - l_1 - 1)[(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)].$$

В силу $c(H_{divisional}) \le c(H_{functional})$ можно записать:

$$l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \le n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Если в первом слагаемом слева вместо l подставить l–1, то условие останется выполненным. Отсюда можно получить верхнюю оценку выражения, приведенного в квадратной скобке в правой части неравенства. Оценка имеет следующий вид:

$$[(n-1)(\lambda^{\alpha}+c_0^{\alpha})+((n\theta)^{\alpha}+c_0^{\alpha})]\le$$
$$\le(n(l-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})+(n-1)((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha}))/(l-1).$$

Подставим эту оценку в неравенство:

$$(n_1+1)(l-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})+n_1((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha})\ge$$
$$\ge(l-l_1-1)[n(l-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})+(n-1)((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha})]/(l-1).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})[(n_1+1)(l-1)-n(l-l_1-1)]\ge$$
$$\ge((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha})[(l-l_1-1)(n-1)/(l-1)-n_1].$$

Мы рассматриваем случай $(l-l_1-1)/(l-1)<n_1/(n-1)$. Поэтому правая часть отрицательна. Кроме того, имеем $n_1(l-1)>(l-l_1-1)(n-1)$. Прибавим l–1 к обеим частям, получим $(n_1+1)(l-1)>(l-l_1-1)n-l+l_1+1+l-1=(l-l_1-1)n+l_1$. То есть левая часть неравенства неотрицательна. Таким образом, и в случае $(l-l_1-1)/(l-1)<n_1/(n-1)$ выполнено $c(H)\ge c(H_{divisional})$.

2. Последний случай $c(H_{functional})\le c(H_{divisional})$ рассматривается аналогично.

а) В силу (*) имеем $c(H)\ge x_2+x_3+y_2+y_3$. Выпишем неравенство $x_2+x_3+y_2+y_3\ge c(H_{functional})$ подробно:

$$n_1((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha})+l(n-n_1-1)(\lambda^{\alpha}+c_0^{\alpha})+l_1((n\theta)^{\alpha}+c_0^{\alpha})+$$
$$+n(l-l_1-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})\ge n(l-1)(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})+(n-1)((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha}).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа с четвертым слева, а второе справа – с первым слева:

$$l(n-n_1-1)(\lambda^{\alpha}+c_0^{\alpha})+l_1((n\theta)^{\alpha}+c_0^{\alpha})\ge n(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})l_1+(n-n_1-1)((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha}).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа со вторым слева, а первое слева – со вторым справа, получим следующее неравенство:

$$(n-n_1-1)[l(\lambda^{\alpha}+c_0^{\alpha})-((l\lambda)^{\alpha}+c_0^{\alpha})]\ge l_1[n(\theta^{\alpha}+c_0^{\alpha})-((n\theta)^{\alpha}+c_0^{\alpha})].$$

В силу $c(H_{functional})\le c(H_{divisional})$ можно записать:

$$n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \le l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Отсюда можно получить нижнюю оценку выражения, приведенного в квадратной скобке в левой части неравенства. Оценка имеет следующий вид $(l-1)[n(\theta^\alpha + c_0^\alpha) - ((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha)]/(n-1)$. Подставим эту оценку в неравенство вместо квадратной скобки слева:

$$(n - n_1 - 1)(l-1) \ge (n-1)l_1 .$$

Выражение в квадратных скобках сократилось в силу его неотрицательности (см. (**)). То есть при $(n - n_1 - 1)/(n-1) \ge l_1/(l-1)$ выполнено $c(H) \ge c(H_{functional})$.

b) Рассмотрим случай $(n - n_1 - 1)/(n-1) < l_1/(l-1)$. Если l_1=0 или n_1=0, то это условие неверно, поскольку $n_1 \le n-1$ и $l_1 \le l-1$. Поэтому в рассматриваемом случае n_1>0 и l_1>0, то есть в силу (*) можно использовать оценку $c(H) \ge x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

Выпишем неравенство $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \ge c(H_{functional})$ подробно:

$$(n_1+1)(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + n_1((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) + (l_1+1)(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \ge n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Сгруппируем первое слагаемое справа с первым слева, а второе справа – со вторым слева:

$$(l_1+1)(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + l_1((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha) \ge \\ \ge (n - n_1 - 1)[(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)].$$

В силу $c(H_{functional}) \le c(H_{divisional})$ можно записать:

$$n(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + (n-1)((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha) \le l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + \\ + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha).$$

Если в первом слагаемом слева вместо n подставить n–1, то условие останется выполненным. Отсюда можно получить верхнюю оценку выражения, приведенного в квадратной скобке в правой части неравенства. Оценка имеет следующий вид:

$$[(l-1)(\theta^\alpha + c_0^\alpha) + ((l\lambda)^\alpha + c_0^\alpha)] \le \\ \le (l(n-1)(\lambda^\alpha + c_0^\alpha) + (l-1)((n\theta)^\alpha + c_0^\alpha))/(n-1).$$

Подставим эту оценку в неравенство:

$$(l_1+1)(n-1)(\lambda^\alpha+c_0^\alpha)+l_1((n\theta)^\alpha+c_0^\alpha)\ge$$
$$\ge(n-n_1-1)[l(n-1)(\lambda^\alpha+c_0^\alpha)+(l-1)((n\theta)^\alpha+c_0^\alpha)]/(n-1).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$(\lambda^\alpha+c_0^\alpha)[(l_1+1)(n-1)-l(n-n_1-1)]\ge$$
$$\ge((n\theta)^\alpha+c_0^\alpha)[(n-n_1-1)(l-1)/(n-1)-l_1].$$

Мы рассматриваем случай $(n-n_1-1)/(n-1)<l_1/(l-1)$. Поэтому правая часть отрицательна. Кроме того, имеем $l_1(n-1)>(n-n_1-1)(l-1)$. Прибавим n–1 к обеим частям, получим $(l_1+1)(n-1)>(n-n_1-1)l-n+n_1+1+n-1=(n-n_1-1)l+n_1$. То есть левая часть неравенства неотрицательна. Таким образом, и в случае $(n-n_1-1)/(n-1)<l_1/(l-1)$ выполнено $c(H)\ge c(H_{functional})$.

Итак, во всех случаях затраты H не меньше затрат дивизиональной, функциональной или матричной иерархии. Таким образом $c(H)\ge\min(c(H_{divisional}),c(H_{functional}),c(H_{matrix}))$. То есть дивизиональная, функциональная или матричная иерархия оптимальна. ■

Доказательство леммы 6. Рассмотрим следующую функцию $\xi(\alpha)=[(n^\alpha-n)/(n-1)]^{1/\alpha}$. В силу $\alpha>1$ и $n\ge2$ выполнено $\xi(\alpha)>0$. Прологарифмируем, а затем продифференцируем обе части по α:

$$\alpha\ln\xi(\alpha)=\ln(n^\alpha-n)-\ln(n-1),$$
$$\alpha\xi'(\alpha)/\xi(\alpha)=(n^\alpha\ln n)/(n^\alpha-n).$$

В силу $\alpha>1$ выполнено $\xi'(\alpha)>0$, то есть $\xi(\alpha)$ монотонно возрастает по α.

Для того, чтобы доказать монотонное возрастание величины $[(n^\alpha-n)/(n-1)]^{1/\alpha}$ по n достаточно доказать монотонное возрастание функции $\varsigma(n)=(n^\alpha-n)/(n-1)$. Продифференцируем по n:

$$\varsigma'(n)=[(\alpha n^{\alpha-1}-1)(n-1)-(n^\alpha-n)]/(n-1)^2.$$

Для того, чтобы доказать монотонное возрастание $\varsigma(n)$ по n достаточно доказать, что $\varsigma'(n)>0$. Осталось доказать, что выражение в квадратных скобках положительно:

$$(\alpha-1)n^{\alpha}-(\alpha n^{\alpha-1}-1)>0.$$

Левая часть неравенства возрастает по n, поскольку положительна ее производная $\alpha(\alpha-1)n^{\alpha-2}(n-1)>0$. При n=1 левая часть равна нулю. Поэтому при $n\geq 2$ неравенство выполнено. ■

Доказательство утверждения 6. В силу утверждения 1 найдется оптимальная иерархия $H=(N\cup M,E)\in\Omega(N)$, удовлетворяющая условиям (i)-(iii) (см. страницу 28).

Если у всех сотрудников H, кроме высшего менеджера, ровно один непосредственный начальник, то H – искомое оптимальное дерево (см. определение 2 на странице 20). В противном случае найдется сотрудник $v\in N\cup M$, у которого два или более непосредственных начальника. Если таких сотрудников несколько, то в качестве v рассмотрим сотрудника, который имеет наивысший уровень. То есть все начальники v, кроме высшего менеджера, имеют ровно одного непосредственного начальника.

Обозначим двух непосредственных начальников v через v_1 и u_1 (если таких начальников больше, чем два, то выберем любую пару). В силу условия (ii) утверждения 1 сотрудники v_1 и u_1 подчинены высшему менеджеру m. То есть существует путь из v_1 в m и путь из u_1 в m.[70] Следовательно, из v существуют два различных пути в m. Эти пути выходят из v в две разные вершины и затем сходятся в одной из вершин (в m или в одном из подчиненных m). Обозначим участки путей до первого пересечения через v – v_1 –…– v_{n_1} и v – u_1 –…– u_{n_2}. У этих участков общее начало v, общий конец $v_{n_1}=u_{n_2}$ и различные промежуточные вершины. В силу выбора v у каждого из менеджеров $v_1,\ldots,v_{n_1-1}$ ровно один непосредственный начальник – следующая вершина пути. То же верно и для менеджеров $u_1,\ldots,u_{n_2-1}$. Соответствующий фрагмент иерархии изображен на рисунке 45.

Начальная иерархия H удовлетворяет условиям (i)-(iii) утверждения 1. Ниже описано перестроение, не увеличивающее затраты

[70] Один из этих путей может состоять из одной вершины (в случае v_1=m или u_1=m).

иерархии. При этом иерархию, получающуюся после каждого перестроения, также будем обозначать через H. Перестроенные иерархии будут удовлетворять условию (ii) утверждения 1. То есть в них все сотрудники будут подчинены высшему менеджеру m. Поэтому пути, выходящие из v, будут пересекаться, и фрагмент иерархии будет выглядеть так, как показано на рисунке 45.

На каждом шаге возможен один из двух вариантов перестроения иерархии H (рисунок 45 поясняет эти варианты).

а) Пусть выполнено $s_H(v)=s_H(v_1)$, то есть сотрудники v и v_1 управляют одной и той же группой[71]. Удалим менеджера v_1. Если v не был подчинен менеджеру v_2, то подчиним ему сотрудника v вместо v_1. При этом не изменятся группы, подчиненные всем менеджерам, оставшимся в иерархии. То есть могли измениться лишь затраты менеджера v_2. Затраты v_2 не возросли, поскольку функция монотонна по группам. Следовательно, полученная иерархия оптимальна.

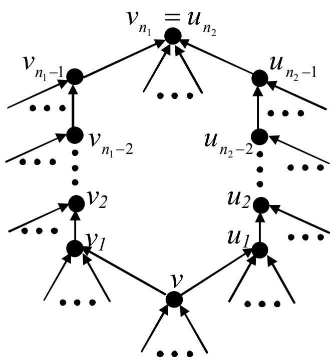

Рисунок 45. Перестроение в случае монотонной по группам функции

После удаления v_1 некоторые сотрудники могут остаться без начальников. Такие сотрудники не могут быть исполнителями, так как после удаления высший менеджер иерархии управляет всеми

[71] В некоторых случаях перестроенные иерархии могут не удовлетворять условию (i) утверждения 1. То есть равенство $s_H(v)=s_H(v_1)$ может быть выполнено.

исполнителями. То есть после удаления v_1 могут появиться менеджеры без начальников, отличные от высшего менеджера. Такие менеджеры могут быть удалены, при этом граф останется оптимальной иерархией. После удаления могут появиться новые менеджеры без начальников, отличные от высшего менеджера, которых также можно удалить. Продолжим подобные действия. В силу конечности множества менеджеров придем в итоге к оптимальной иерархии, в которой только высший менеджер не имеет начальников. То есть выполнено условие (ii) утверждения 1.

b) Выполнено $s_H(v) \neq s_H(v_1)$. То есть v_1 управляет более широкой группой, чем v: $s_H(v) \subset s_H(v_1)$. Следовательно, кроме v у v_1 имеется по крайней мере еще один непосредственный подчиненный. Удалим ребро (v,v_1). При этом у менеджера v_1 все еще останутся подчиненные. Группа $s_1=s_H(v_1)$, которой управлял менеджер v_1, изменится на новую группу s_1', поскольку менеджер v_1 теперь уже может не управлять некоторыми исполнителями из группы $s_H(v)$. Однако v_1 продолжит управлять теми исполнителями группы s_1, которые не входят в $s_H(v)$. То есть выполнено $s_1' \subseteq s_1$, $(s_1 \setminus s_1') \subseteq s_H(v)$. Из v_1 выходит только одно ребро (v_1,v_2). Изменение группы $s_1=s_H(v_1)$ на s_1' может привести к изменению группы $s_2=s_H(v_2)$, которой управляет менеджер v_2. Обозначим измененную группу через s_2'. Как указано выше, из s_1 могли быть исключены только исполнители группы $s_H(v)$. Поэтому только эти исполнители могут быть исключены и из s_2. То есть выполнено $s_2' \subseteq s_2$, $(s_2 \setminus s_2') \subseteq s_H(v)$. Аналогично, для всех $i = \overline{3, n_1 - 1}$ группа $s_i=s_H(v_i)$, подчиненная менеджеру v_i, изменится на группу s_i'. Причем выполнено $s_i' \subseteq s_i$, $(s_i \setminus s_i') \subseteq s_H(v)$.

Рассмотрим группу $s_H(v_{n_1})$. Она равна объединению групп, которыми управляют все непосредственные подчиненные менеджера v_{n_1} (см. лемму 1 на странице 20). Среди этих групп в результате удаления ребра (v,v_1) поменяется только группа s_{n_1-1}, которой управляет менеджер v_{n_1-1}.[72] Причем в силу $(s_{n_1-1} \setminus s'_{n_1-1}) \subseteq s_H(v)$ из этой группы могут быть исключены лишь исполнители, принадлежащие $s_H(v)$. Однако эти исполнители входят в группу $s_H(u_{n_2-1})$. Поэтому группа $s_H(v_{n_1})$ не изменится. Следовательно, не изменятся и группы, которыми управляют начальники менеджера v_{n_1}.

Таким образом, удаление ребра (v,v_1) могло повлиять только на группы $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_{n_1-1})$. То есть высший менеджер по-прежнему управляет всеми исполнителями, у каждого менеджера имеются подчиненные, граф остался ацикличным (удаление ребра не могло привести к циклам). Следовательно, полученный граф удовлетворяет всем условиям определения 1, то есть представляет собой иерархию.

Кроме того, у каждого сотрудника, кроме высшего менеджера, имеется хотя бы один непосредственный начальник. Поэтому в силу ацикличности все сотрудники подчинены высшему менеджеру. То есть выполнено условие (ii) утверждения 1.

Число непосредственных подчиненных менеджера v_1 уменьшилось на единицу. Число непосредственных подчиненных менеджеров $v_2,\ldots,v_{n_1}$ осталось прежним, однако могла сократиться группа, которой управляет один из непосредственных подчиненных. Затраты менеджеров $v_1,\ldots,v_{n_1}$ не возросли, поскольку функция затрат монотонна по группам. Следовательно, не возросли затраты всей иерархии. То есть полученная иерархия оптимальна.

Как в случае a), так и в случае b) получена оптимальная иерархия, удовлетворяющая условию (ii) утверждения 1. Это позволяет повторять перестроение a) или b), пока в полученной иерархии имеется сотрудник с двумя или более непосредственными начальниками. При каждом перестроении число ребер иерархии сокращается как минимум на единицу. В силу конечности множества ребер перестроения закончатся через конечное число шагов.

---

[72] Среди непосредственных подчиненных менеджера v_{n_1} только v_{n_1-1} управляет менеджерами $v_1,\ldots v_{n_1-2}$, поскольку у каждого из них ровно один непосредственный начальник.

В полученной оптимальной иерархии H_1 высший менеджер не будет иметь начальников, остальные сотрудники будут иметь ровно по одному непосредственному начальнику. То есть H_1 – оптимальное дерево. В силу утверждения 1 можно найти дерево H^*, удовлетворяющее условиям (i)-(iii) (см. страницу 28). Причем затраты H^* не будут превышать затрат дерева H_1.

То есть H^* – оптимальное дерево, удовлетворяющее условиям (i)-(iii). ■

Доказательство утверждения 7. Рассмотрим некоторую оптимальную иерархию $H \in \Omega(N)$. Обозначим максимальное число непосредственных подчиненных одного менеджера через k. Если k=2, то H – искомая 2-иерархия. Если k>2, то рассмотрим некоторого менеджера m, который имеет k непосредственных подчиненных $v_1,\ldots,v_k$. Обозначим управляемые ими группы через $s_1=s_H(v_1),\ldots,s_k=s_H(v_k)$. Поскольку функция затрат сужающая, найдется некоторое количество сотрудников $1 < j < k$ и некоторая перестановка $(i_1,\ldots,i_k)$, для которых выполнено неравенство (35). Перестроим иерархию H. Наймем нового менеджера m_1. Сотрудников $v_{i_1},\ldots,v_{i_j}$ непосредственно подчиним менеджеру m_1 вместо менеджера m. Самого менеджера m_1 непосредственно подчиним менеджеру m (см. пример на рисунке 29). В силу неравенства (35) затраты не возрастут, то есть полученная иерархия оптимальна. В результате менеджер m_1 имеет $j<k$ непосредственных подчиненных. Менеджер m имеет $k-j+1<k$ непосредственных подчиненных. Таким образом, в новой иерархии число менеджеров с k непосредственными подчиненными уменьшилось на единицу. Продолжая аналогичные перестроения, придем к оптимальной иерархии, в которой максимальное число непосредственных подчиненных одного менеджера равно $k' < k$. Если $k' > 2$, то можно снова проделать аналогичные действия.

В итоге придем к оптимальной 2-иерахии H_1. В силу утверждения 1 можно найти 2-иерархию H^*, удовлетворяющую условиям (i)-(iii) (см. страницу 28). Причем затраты H^* не будут превышать затрат иерархии H_1. То есть H^* – оптимальная 2-иерархия, удовлетворяющая условиям (i)-(iii). ■

Доказательство следствия (из утверждений 6 и 7). По утверждению 6 для монотонной по группам функции затрат найдется оптимальное дерево. В доказательстве утверждения 7 в качестве начальной иерархии H можно рассмотреть это дерево. По лемме 2 (страница 21) в дереве не пересекаются группы, управляемые непосредственными подчиненными одного менеджера. Поэтому среди групп $s_1,\ldots,s_k$ в доказательстве утверждения 7 нет пересекающихся. То есть для перестроения достаточно, чтобы функция затрат была сужающей на непересекающихся группах. После перестроения, описанного в доказательстве утверждения 7, также получим дерево (добавленный менеджер и все остальные сотрудники, кроме высшего менеджера, имеют ровно одного непосредственного начальника). В итоге перестроения придем к оптимальному 2-дереву. Аналогично доказательству утверждения 7 можно найти оптимальное 2-дерево, удовлетворяющее условиям (i)-(iii) утверждения 1. ■

Доказательство утверждения 8. Рассмотрим оптимальную иерархию $H \in \Omega(N)$, удовлетворяющую условиям (i)-(iii) утверждения 1 (см. страницу 28). Согласно условию (ii) в ней имеется высший менеджер m, которому подчинены все остальные сотрудники.

Если m – единственный менеджер, то H – оптимальная двухуровневая иерархия. В противном случае среди непосредственных подчиненных менеджера m имеется некоторый менеджер m_1. Обозначим непосредственных подчиненных менеджера m_1 через $v_1,\ldots,v_j$. Группы, которыми управляют эти сотрудники, обозначим через $s_1=s_H(v_1),\ldots,s_j=s_H(v_j)$. Поскольку иерархия удовлетворяет условию (i) утверждения 1, у каждого менеджера не менее двух непосредственно подчиненных сотрудников. То есть $j>1$ и у менеджера m, кроме m_1, имеются другие непосредственные подчиненные. Обозначим их через $v_{j+1},\ldots,v_k$, $k \geq 3$. Группы, которыми управляют эти сотрудники, обозначим через $s_{j+1}=s_H(v_{j+1}),\ldots,s_k=s_H(v_k)$.

Предположим, что у менеджера m_1 кроме m имеется еще один непосредственный начальник m'. То есть имеется два пути из m_1 в m: первый путь идет непосредственно из m_1 в m, второй идет через менеджера m'. Помимо m_1 второй путь проходит через одного из непосредственных подчиненных менеджера m, а именно через одного из сотрудников $v_{j+1},\ldots,v_k$. Таким образом, этот сотрудник управляет менеджером m_1. Это противоречит условию (iii) утверждения 1, согласно которому ни один непосредственный подчиненный менеджера не управляет другим. Поэтому, у менеджера m_1 имеется только один начальник – высший менеджер m.

Согласно условию (iii) утверждения 1 среди сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ не может быть непосредственных подчиненных менеджера m, поскольку иначе один непосредственный подчиненный (менеджер m_1) управлял бы другим. Поэтому среди $v_{j+1},\ldots,v_k$ и $v_1,\ldots,v_j$ нет одних и тех же сотрудников. Следовательно, верхняя часть иерархии выглядит так, как показано на рисунке 29b).

Поскольку функция затрат расширяющая, для любого набора групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$, любого $1 < j < k$ и любой перестановки $(i_1,\ldots,i_k)$ выполнено неравенство (36). При $(i_1,\ldots,i_k)=(1,\ldots,k)$ из неравенства (36) следует:

$$c(s_1,\ldots,s_k) \leq c(s_1,\ldots,s_j) + c(s_1 \cup \ldots \cup s_j, s_{j+1},\ldots,s_k). \qquad (*)$$

Перестроим иерархию. Непосредственно подчиним сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ менеджеру m вместо менеджера m_1. Менеджера m_1 удалим. Перестроенный фрагмент графа выглядит так, как показано на рисунке 29a). Менеджер m по-прежнему управляет всеми исполнителями. То есть в результате получили иерархию. Группы, подчиненные остальным менеджерам, также не изменились. В построенной иерархии затраты менеджера m (левая часть неравенства (*)) не превышают затрат менеджеров m и m_1 в исходной иерархии (правая часть неравенства (*)). Следовательно, построенная иерархия оптимальна.

Построенная иерархия удовлетворяет условиям (i) и (ii) утверждения 1. Однако условие (iii) может нарушиться, так как некоторые из сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ могут быть подчинены некоторым из сотрудников $v_{j+1},\ldots,v_k$. Предположим, что сотрудник v_{j_1} подчинен сотруднику v_{j_2}, $1 \leq j_1 \leq j$, $j+1 \leq j_2 \leq k$. Тогда в силу леммы 1 (страница 20) выполнено $s_{j_1} \subseteq s_{j_2}$. В силу леммы 4 (страница 28) можно удалить «лишнее» ребро (v_{j_1}, m) без увеличения затрат иерархии. Сотрудник v_{j_1} при этом будет подчинен высшему менеджеру, но не непосредственно, а через сотрудника v_{j_2}. Продолжая подобные удаления, получим оптимальную иерархию, удовлетворяющую условиям (i), (ii) и (iii).

Полученная оптимальная иерархия содержит на одного менеджера меньше, чем исходная иерархия, поскольку менеджер m_1 был удален. Продолжая аналогичные действия, придем к двухуровневой иерархии с единственным менеджером m. То есть двухуровневая иерархия оптимальна. ■

Доказательство следствия (из утверждений 6 и 8). По утверждению 6 для монотонной по группам функции затрат найдется оптимальное дерево. В доказательстве утверждения 8 в качестве начальной иерархии H можно рассмотреть это дерево. По лемме 2 в дереве не пересекаются группы, управляемые непосредственными подчиненными одного менеджера. Поэтому среди групп $s_1,\ldots,s_k$ в доказательстве утверждения 8 нет пересекающихся. То есть для перестроения иерархии, описанного в доказательстве утверждения 8, достаточно, чтобы функция затрат была расширяющей на непересекающихся группах. После перестроения получим дерево, поскольку у всех сотрудников, кроме высшего менеджера, ровно один непосредственный начальник. После всех перестроений придем к оптимальной двухуровневой иерархии. ■

Доказательство утверждения 9. Согласно утверждению 7 для сужающей функции затрат найдется оптимальная 2-иерархия H_1. В силу утверждения 1 найдется также оптимальная 2-иерархия H, которая удовлетворяет свойствам (i)-(iii) (страница 28). Ниже в доказательстве будем пользоваться условием (i), согласно которому все сотрудники иерархии управляют различными группами. Из условия (i) следует, что каждый менеджер имеет ровно двух непосредственных подчиненных.

Менеджера назовем *неправильным*, если ему непосредственно подчинены два других менеджера. Если H не содержит неправильных менеджеров, то каждому менеджеру подчинен хотя бы один исполнитель. То есть H – искомая оптимальная последовательная иерархия. Если в H имеются неправильные менеджеры, то будем уменьшать их количество, перестраивая иерархию без увеличения затрат.

Рассмотрим неправильного менеджера m, которому подчинены только правильные менеджеры. m имеет двух непосредственных подчиненных m_1 и m_2. Правильные менеджеры m_1 и m_2 непосредственно управляют хотя бы одним исполнителем. То есть менеджер m_1 непосредственно управляет некоторым исполнителем w' и сотрудником v'. Менеджер m_2 непосредственно управляет некоторым исполнителем w'' и сотрудником v''. Соответствующий фрагмент иерархии выглядит так, как показано на рисунке 33a).

Обозначим группы, управляемые менеджерами m_1 и m_2, через $s_1=s_H(m_1)$ и $s_2=s_H(m_2)$. В силу условия (i) утверждения 1 сотрудник v' не может управлять исполнителем w', поскольку в этом случае m_1 и v' управляли бы одной и той же группой. То есть $s_H(v') = s_1 \setminus \{w'\}$. Аналогично $s_H(v'') = s_2 \setminus \{w''\}$.

Если для групп s_1 и s_2 выполнено условие a) определения 11, то без увеличения затрат можно нанять нового менеджера m_3 и непосредственно подчинить ему сотрудников v' и m_2. А менеджеру m непосредственно подчинить исполнителя w' и менеджера m_3. На рисунке 33b) изображен результат перестроения.

Новый менеджер управляет группой $(s_1 \setminus \{w'\}) \cup s_2$. До перестроения затраты менеджера m составляли $c(s_1,s_2)$. В новой иерархии изменились только затраты менеджера m и добавились затраты m_3. Таким образом, разница затрат старой и новой иерархии равна $c(s_1, s_2) - c(s_1 \setminus \{w'\}, s_2) - c((s_1 \setminus \{w'\}) \cup s_2, \{w'\}) \geq 0$. Следовательно, затраты не увеличились и полученная иерархия оптимальна.

Если для групп s_1 и s_2 выполнено условие b) определения 11, то можно перестроить иерархию аналогичным образом, непосредственно подчинив менеджеру m исполнителя w''. На рисунке 33c) изображен результат перестроения.

Итак, в случае сильно сужающей функции можно построить оптимальную 2-иерархию, в которой менеджер m будет правильным. В построенной иерархии может нарушаться условие (i) утверждения 1, поскольку менеджер m_3 может управлять той же группой, что и некоторый менеджер m'. В этом случае менеджеру m можно непосредственно подчинить менеджера m' вместо m_3, а менеджера m_3 удалить[73]. Иерархия при этом останется оптимальной, будет выполнено условие (i), менеджер m останется правильным.

Если менеджер m_3 был удален или m_3 – правильный менеджер, то построена иерархия, в которой на одного неправильного менеджера меньше, чем в исходной иерархии H. Предположим, что в полученной иерархии остался неправильный менеджер m_3. В этом случае ему подчинена меньшая группа, чем менеджеру m. То есть вместо неправильного менеджера m появился неправильный менеджер m_3, которому подчинена меньшая группа. Можно повторить перестроение, рассматривая менеджера m_3 вместо m. Поскольку число исполнителей, подчиненных неправильному менеджеру, постоянно уменьшается, придем в итоге к оптимальной иерархии, в которой на одного неправильного менеджера меньше, чем в исходной иерархии H.

Повторяя аналогичные перестроения, будем уменьшать количество неправильных менеджеров. В итоге придем к иерархии без неправильных менеджеров, то есть к искомой оптимальной последовательной иерархии H_2.

После определения 10 указано, что утверждение 1 справедливо и для последовательных иерархий. Следовательно, найдется последовательная иерархия H^*, которая удовлетворяет условиям (i)-(iii) утверждения 1 (страница 28). Причем затраты H^*, не превышают затрат H_2. То есть найдена оптимальная последовательная иерархия H^*, имеющая вид, приведенный на рисунке 32. ■

Доказательство утверждения 10. Рассмотрим некоторый набор групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенствах (35) и (36) (см. раздел 3.3), которые соответствуют сужающей и расширяющей функции (см. определение 9 на странице 104).

[73] По построению m – единственный непосредственный начальник менеджера m_3. Поэтому такое перестроение не изменит групп, которыми управляют менеджеры, оставшиеся в иерархии, и не изменит их затраты.

Пусть $\beta \le 1$. Для произвольного количества сотрудников $1 < j < k$ и любой перестановки $(i_1,\ldots,i_k)$ докажем неравенство (36): $c(s_1,\ldots,s_k) \le c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k})$. Введем следующие обозначения: $x_1 = \mu(s_{i_1})^\alpha,\ldots,x_j = \mu(s_{i_j})^\alpha$, $x' = \max(x_1,\ldots,x_j)$, $x = x_1+\ldots+x_j$, $y_{j+1} = \mu(s_{i_{j+1}})^\alpha, y_{j+2} = \mu(s_{i_{j+2}})^\alpha,\ldots,y_k = \mu(s_{i_k})^\alpha$, $y' = \max(y_{j+1},\ldots,y_k)$, $y = y_{j+1}+\ldots+y_k$, $s = s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}$. Тогда левую и правую части неравенства (36) можно переписать:

$$z_1 = (x + y - \max(x', y'))^\beta,$$

$$z_2 = (x - x')^\beta + (\mu(s)^\alpha + y - \max(y', \mu(s)^\alpha))^\beta.$$

В силу неравенства (38) с учетом $\beta \le 1$ имеем $z_2 \ge (x + y + \mu(s)^\alpha - x' - \max(y', \mu(s)))^\beta$. Тогда для доказательства неравенства (36) ($z_2 \ge z_1$) достаточно доказать:

$$x + y - \max(x', y') \le x + y + \mu(s)^\alpha - x' - \max(y', \mu(s)^\alpha).$$

Перепишем это неравенство: $x' + \max(y', \mu(s)^\alpha) \le \mu(s)^\alpha + \max(x', y')$. При $y' \le \mu(s)^\alpha$ неравенство имеет вид $x' \le \max(x', y')$. То есть неравенство выполнено. При $y' > \mu(s)^\alpha$ неравенство имеет вид $x' + y' \le \mu(s)^\alpha + \max(x', y')$. Имеем $y' \le \max(x', y')$, $x' \le \mu(s)^\alpha$, поскольку $s = s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}$. То есть неравенство (36) выполнено. Следовательно, при $\beta \le 1$ функция (I) – расширяющая.

Пусть $\beta \ge 1$. Считаем, что $\mu(s_1) = \max(\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k))$ (иначе можно изменить нумерацию групп $s_1,\ldots,s_k$). Рассмотрим две группы s_1 и s_2 (j=2) и перестановку $(1,2,\ldots,k)$. Докажем для них неравенство (35): $c(s_1,\ldots,s_k) \ge c(s_1, s_2) + c(s_1 \cup s_2, s_3,\ldots,s_k)$. Левую и правую части неравенства (35) можно переписать: $z_1 = (\mu(s_2)^\alpha + \ldots + \mu(s_k)^\alpha)^\beta$, $z_2 = \mu(s_2)^{\alpha\beta} + (\mu(s_3)^\alpha + \ldots + \mu(s_k)^\alpha)^\beta$. В силу неравенства (37) с учетом $\beta \ge 1$ имеем $z_1 \ge z_2$. То есть неравенство (35) выполнено. Следовательно, при $\beta \ge 1$ функция (I) – сужающая.

Пусть кроме $\beta \ge 1$ выполнено условие $\alpha\beta \ge 1$. Докажем, что в этой области параметров функция (I) – сильно сужающая (см.

определение 11 на странице 116). Для этого рассмотрим произвольные группы s_1 и s_2 из двух или более исполнителей. Рассмотрим случай $\mu(s_1) \le \mu(s_2)$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенстве a) определения 11:

$$z_1 = c(s_1, s_2),\ z_2 = c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\}),$$

где w – произвольный исполнитель группы s_1. Обозначим $x = \mu(s_1)$, $y = \mu(s_1 \setminus \{w\})$, $z = \mu(\{w\})$. Тогда $z_1 = x^{\alpha\beta}$, $z_2 = y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta}$. Заметим, что $x=y+z$. Тогда неравенство a) определения 11 ($z_1 \ge z_2$) имеет вид $(y+z)^{\alpha\beta} \ge y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta}$. В силу неравенства (37) с учетом $\alpha\beta \ge 1$ имеем $z_1 \ge z_2$.

Если выполнено $\mu(s_1) \ge \mu(s_2)$, то неравенство b) определения 11 доказывается аналогично с точностью до замены s_1 на s_2.

Следовательно, при $\beta \ge 1$ и $\alpha\beta \ge 1$ функция (I) – сильно сужающая. ■

Доказательство утверждения 11. Рассмотрим некоторый набор групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \ge 3$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенстве (36) (см. страницу 106), которое соответствует расширяющей функции (см. определение 9).

Для произвольного $1 < j < k$ и любой перестановки $(i_1,\ldots,i_k)$ докажем неравенство (36):

$$c(s_1,\ldots,s_k) \le c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k}).$$

Введем следующие обозначения $s = s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}$, $x = \mu(s_{i_1})^\alpha + \ldots + \mu(s_{i_j})^\alpha$, $y = \mu(s_{i_{j+1}})^\alpha + \ldots + \mu(s_{i_k})^\alpha$. Тогда левую и правую части неравенства (36) можно переписать: $z_1 = (x+y)^\beta$, $z_2 = x^\beta + (\mu(s)^\alpha + y)^\beta$.

При $\beta \le 1$ в силу неравенства (38) выполнено $z_1 \le x^\beta + y^\beta \le z_2$. То есть неравенство (36) выполнено. Следовательно, при $\beta \le 1$ функция (II) – расширяющая.

Если среди $s_1,\ldots,s_k$ нет пересекающихся групп, то можно записать $\mu(s) = \mu(s_{i_1}) + \ldots + \mu(s_{i_j})$. При $\alpha \ge 1$ в силу неравенства

(37) выполнено $\mu(s)^{\alpha} \geq \mu(s_{i_1})^{\alpha} + \ldots + \mu(s_{i_j})^{\alpha} = x$. Тогда имеем $z_2 \geq (x+y)^{\beta} = z_1$. То есть неравенство (36) выполнено. Следовательно, при $\beta > 1$ и $\alpha \geq 1$ функция (II) – расширяющая на непересекающихся группах.

Заметим, что если группы пересекаются, то неравенство (36) может не выполняться. Пусть, например, $s_1=\{w_1,w_2\}$, $s_2=\{w_1,w_3\}$,…, $s_{k-1}=\{w_1,w_k\}$, $s_k=\{w_{k+1}\}$, $\mu(w_1) = \mu(w_{k+1}) = 1$, $\mu(w_2) = \ldots = \mu(w_k) = 0$. Рассмотрим число сотрудников $j=k-1$ и тождественную перестановку $(1,\ldots,k)$. Тогда $x=k-1$, $y=1$, $\mu(s)^{\alpha} = 1$. Имеем $z_1 = k^{\beta}$, $z_2 = (k-1)^{\beta} + 2^{\beta}$. Неравенство (36) имеет вид $z_1 - z_2 \leq 0$ или $k^{\beta} - (k-1)^{\beta} \leq 2^{\beta}$. При любом $\beta > 1$ левая часть возрастает по k. При достаточно большом k неравенство (36) нарушается. Следовательно, при $\beta > 1$ и $\alpha \geq 1$ функция (II) не является расширяющей, но является расширяющей на непересекающихся группах.

Осталось показать, что при $\beta > 1$ и $\alpha < 1$ функция (II) – ни расширяющая, ни сужающая. Покажем, что это выполнено даже на наборах непересекающихся групп.

Рассмотрим набор групп $s_1=\{w_1\}$,$s_2=\{w_2\}$,…,$s_k=\{w_k\}$, $\mu(w_1) = \ldots = \mu(w_k) = 1$, где $k \geq 1$ – четное число. Рассмотрим число сотрудников $j=k/2$ и тождественную перестановку $(1,\ldots,k)$. Тогда $x=k/2$, $y=k/2$, $\mu(s)^{\alpha} = (k/2)^{\alpha}$. Имеем $z_1 = k^{\beta}$, $z_2 = (k/2)^{\beta} + ((k/2)^{\alpha} + k/2)^{\beta}$. Неравенство (36) имеет вид $z_2 \leq z_1$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} + \left(\frac{1}{2^{\alpha} k^{1-\alpha}} + \frac{1}{2}\right)^{\beta} \geq 1$. При $\alpha < 1$ левая часть неравенства убывает при увеличении k. При достаточно большом k ее можно сделать сколь угодно близкой к величине $1/2^{\beta-1}$. При $\beta > 1$ эта величина меньше 1. То есть при достаточно большом k неравенство (36) нарушается. Следовательно, при $\beta > 1$ и $\alpha < 1$ функция (II) не является расширяющей даже на непересекающихся группах.

Рассмотрим набор групп $s_1=\{w_1\}$, $s_2=\{w_2\}$, $s_3=\{w_3\}$, $\mu(w_1) = \mu(w_2) = 1$, $\mu(w_3) = 0$. Докажем, что для произвольного количества сотрудников $1 < j < 3$ (то есть $j=2$) и любой перестановки (i_1,i_2,i_3) не выполнено неравенство (35) $c(s_1,\ldots,s_k) \geq c(s_{i_1},\ldots,s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \ldots \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k})$. Если перестановка имеет вид (1,2,3) или (2,1,3), то неравенство перепишется в виде $2^\beta \geq 2^\beta + 2^{\alpha\beta}$. При всех остальных перестановках неравенство имеет вид $2^\beta \geq 1 + 2^\beta$. Таким образом, не существует $1 < j < 3$ и перестановки (i_1,i_2,i_3), для которой выполнено неравенство (35). Следовательно, функция (II) не является сужающей даже на непересекающихся группах. ■

Доказательство утверждения 12. Сначала докажем, что при $\beta \geq 1$ функция (III) – сужающая. Рассмотрим некоторый набор групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенстве (35) (см. страницу 105), которое соответствуют сужающей функции (см. определение 9). Считаем, что $\mu(s_1) = \max(\mu(s_1),\ldots,\mu(s_k))$ (иначе можно изменить нумерацию групп $s_1,\ldots,s_k$). Рассмотрим две группы s_1 и s_2 (j=2) и тождественную перестановку (1,2,…,k). Докажем для них неравенство (35): $c(s_1,\ldots,s_k) \geq c(s_1,s_2) + c(s_1 \cup s_2, s_3,\ldots,s_k)$.

Обозначим $x = \mu(s_1 \cup \ldots \cup s_k)^\alpha$, $y = \mu(s_1 \cup s_2)^\alpha$, $z = \mu(s_1)^\alpha$. Выполнено $z \leq y \leq x$. Левую и правую части неравенства (35) можно переписать: $z_1 = (x/z - 1)^\beta$, $z_2 = (y/z-1)^\beta + (x/y-1)^\beta$.[74] В силу неравенства (37) с учетом $\beta \geq 1$ имеем $z_2 \leq (y/z - 1 + x/y - 1)^\beta$. С учетом этой оценки для доказательства неравенства (35) ($z_2 \leq z_1$) достаточно показать, что $x/z - 1 - y/z + 1 - x/y + 1 \geq 0$. Преобразовывая левую часть, получим:

$$(xy + yz - y^2 - xz)/yz = (x-y)(y-z)/yz \geq 0 .$$

То есть неравенство (35) выполнено. Следовательно, при $\beta \geq 1$ функция (III) – сужающая.

[74] При z=0 имеем $z_1 = +\infty$, следовательно, выполнено неравенство $z_1 \geq z_2$. Далее считаем $z > 0$.

Теперь покажем, что при $\beta \geq 1$ функция (III) – сильно сужающая (см. определение 11 на странице 116). Для этого рассмотрим произвольные группы s_1 и s_2 из двух или более исполнителей.

Рассмотрим случай $\mu(s_1) \leq \mu(s_2)$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенстве а) определения 11 (страница 116):

$$z_1 = c(s_1, s_2)\,,\ z_2 = c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\})\,,$$

где w – произвольный исполнитель группы s_1. Обозначим $x = \mu(s_1 \cup s_2)^\alpha$, $y = \mu((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2)^\alpha$, $z = \mu(s_2)^\alpha$. Имеем $z \leq y \leq x$, $z_1 = (x/z-1)^\beta$, $z_2 = (y/z-1)^\beta + (x/y-1)^\beta$. Выше было показано, что $(x/z-1)^\beta \geq (y/z-1)^\beta + (x/y-1)^\beta$. Таким образом, выполнено неравенство $z_1 \geq z_2$.

В случае $\mu(s_1) \geq \mu(s_2)$ неравенство b) определения 11 доказывается аналогично с точностью до замены s_1 на s_2.

Следовательно, при $\beta \geq 1$ функция (III) – сильно сужающая.■

Доказательство утверждения 13. Докажем, что при $\beta \geq 1$ функция (IV) – сужающая. Рассмотрим некоторый набор групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$. Обозначим через z_1 левую, через z_2 – правую часть в неравенстве (35) (см. страницу 105), которое соответствуют сужающей функции (см. определение 9). Рассмотрим две группы s_1 и s_2 (j=2) и перестановку (1,2,…,k). Докажем для них неравенство (35): $c(s_1,\ldots,s_k) \geq c(s_1, s_2) + c(s_1 \cup s_2, s_3,\ldots,s_k)$.

Введем следующие обозначения $x = \mu(s_1 \cup \ldots \cup s_k)^\alpha$, $y = \mu(s_1 \cup s_2)^\alpha$, $x_1 = \mu(s_1)^\alpha,\ldots,x_k = \mu(s_k)^\alpha$. Левую и правую части неравенства (35) можно переписать: $z_1 = (kx - x_1 - \ldots - x_k)^\beta$, $z_2 = (2y - x_1 - x_2)^\beta + ((k-1)x - y - x_3 - \ldots - x_k)^\beta$. В силу неравенства (37) с учетом $\beta \geq 1$ имеем $z_2 \leq ((k-1)x + y - x_1 - \ldots - x_k)^\beta$. Правая часть не превосходит z_1, поскольку $y \leq x$. То есть выполнено неравенство (35) $(z_2 \leq z_1)$. Следовательно, при $\beta \geq 1$ функция (IV) – сужающая. ■

Доказательство утверждения 14. Для функции (V) имеем $\gamma=\alpha-\beta$. Подставим выражение (40) (функция (V) на непересекающихся группах) в формулу (39). Тогда затраты бесконечного дерева имеют вид:

$$x^{\gamma}(y_1+\ldots+y_k)^{\alpha}/[\min(y_1^{\beta},\ldots,y_k^{\beta})(1-\sum_{i=\overline{1,k}} y_i^{\gamma})]. \qquad (*)$$

В числителе в скобках стоит единица ($y_1+\ldots+y_k=1$). Для минимизации выражения осталось найти максимум знаменателя. Очевидно, что максимум выражения $\min(y_1^{\beta},\ldots,y_k^{\beta})$ достигается при $y_1=\ldots=y_k=1/k$. Простейшими методами мат. анализа показывается, что и максимум $(1-\sum_{i=\overline{1,k}} y_i^{\gamma})$ с учетом $\gamma>1$ достигается при $y_1=\ldots=y_k=1/k$.

Итак, для (V) минимизирует затраты симметричное k-дерево, в котором у каждого менеджера ровно k непосредственных подчиненных, управляющих группами равной сложности. Осталось найти значение k. Игнорируя константу x^{γ}, запишем (*) для $y_1=\ldots=y_k=1/k$ в виде функции $\xi(k)$: $\xi(k)=k^{\beta}/(1-k/k^{\gamma})= k^{\beta+\gamma-1}/(k^{\gamma-1}-1)= =k^{\alpha-1}/(k^{\alpha-\beta-1}-1)$. Игнорируя положительный множитель, выпишем производную:

$$\xi'(k)=(\alpha-1)k^{\alpha-2}(k^{\alpha-\beta-1}-1)-(\alpha-\beta-1)k^{\alpha-\beta-2}\,k^{\alpha-1}=$$
$$=k^{\alpha-2}\,[(\alpha-1)(k^{\alpha-\beta-1}-1)-(\alpha-\beta-1)k^{\alpha-\beta-1}]= k^{\alpha-2}\,[\beta\, k^{\alpha-\beta-1}-(\alpha-1)].$$

Знак производной зависит только от квадратной скобки. Ноль производной достигается в точке $r_0=((\alpha-1)/\beta)^{1/(\alpha-\beta-1)}$. Причем в силу $\alpha-\beta-1>0$ слева от r_0 производная отрицательна (затраты дерева убывают), справа – положительна (затраты дерева возрастают). То есть r_0 – искомая точка минимума. Если r_0 не целое, то минимизирует затраты одно из двух целочисленных значений, ближайших к r_0 сверху или снизу. Подстановкой в $\xi(k)$ легко проверяется, какое именно значение оптимально. ■

Литература

Bolton P., Dewatripont M. (1994) The Firm as a Communication Network. *Quarterly Journal of Economics*, CIX, pp 809–839.

Calvo G., Wellisz S. (1978) Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm. *Journal of Political Economy*, 86, pp 943–952.

Calvo G., Wellisz S. (1979) Hierarchy, Ability and Income Distribution. *Journal of Political Economy*, 87, pp 991–1010.

Davies G., Smith M., Twigger W. (1991) Leading People: a Model of Choice and Fate for Leadership Development. *Leadership & Organization Development*, 12, No. 1, pp 7–11.

Grossman S., Hart O. (1982) Implicit Contracts Under Asymmetric Information. *Quarterly Journal of Economics*, 1, pp 110–124.

Grossman S., Hart O. (1983) An Analysis of the Principal-Agent Problem. *Econometrica*, 51, No. 1, pp 7–45.

Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. (1934) Inequalities. London: Cambridge University Press.

Harris M., Raviv A. (2002) Organization Design. *Management Science*, No. 7.

Hart O. D., Holmstrom B. (1987) Theory of Contracts. Advances in Economic Theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp 71–155.

Huffman D. A. (1952) A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. – Proc. IRE, No. 9, pp 1098–1101.

Jago A. G., Vroom V. H. (1975) Perceptions of Leadership Style: Superior and Subordinate Descriptions of Decision-Making Behavior. In Leadership Frontiers, ed. Hunt J. G, Larson L. L. Carbondale: Southern Illinois University Press, pp 103–120.

Keren M., Levhari D. (1979) The Optimal Span of Control in a Pure Hierarchy. *Management Science*, 25, pp 1162–1172.

Keren M., Levhari D. (1983) The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs. *Bell Journal of Economics*, 14, pp 474–486.

Keren M., Levhari D. (1989) Decentralization, Aggregation, Control Loss and Costs in a Hierarchical Model of the Firm. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 11, pp 213–236.

Manz C. C., Sims H. P. (1987) Leading Workers to Lead Themselves: the External Leadership of Self-Managing Work Teams. Administrat. Sci., pp 106–129.

Marschak T. A., Radner R. (1972) Economic Theory of Teams. New Haven, CT: Yale U. Press.

Maskin E., Qian Y., Xu C. (2000) Incentives, Information and Organizational Form. *Review of Economic Studies*, 67(2), pp 359–378.

Melumad D. N., Mookherjee D., Reichelstein S. (1995) Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts. *The Rand Journal of Economics*, 26, No. 4, pp 654–672.

Milgrom P., Roberts J. (1992) Economics, Organization and Management. Prentice-Hall.

Mintzberg H. (1979) The Structuring of Organizations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Oldman G. R., Hackman J. R. (1981) Relationships Between Organization Structure and Employee Reactions: Comparing Alternative Frameworks. Administrat. Sci., pp 66–83.

Peters T. (1987) Thriving on Chaos. N. Y.: Knopf.

Qian Y. (1994) Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy. *The Review of Economic Studies*, 61, No. 3, pp 527–544.

Qian Y., Roland G., Xu C. (1997) Coordinating Changes in M-form and U-form Organizations. Mimeo, Stanford University, ECARE and LSE.

Radner R. (1992) Hierarchy: The Economics of Managing. *Journal of Economic Literature*, 30, No. 3, pp 1382–1415.

Radner R. (1993) The Organization of Decentralized Information Processing. *Econometrica*, 61, No. 5, pp 1109–1146.

Simon H. A. (1957) The Compensation of Executives. *Sociometry*, 20, No. 1, pp 32–35.

Simon H. A. (1962) The Architecture of Complexity. *Proc. Amer. Philosophical Soc.*, 106(6), pp 467–482.

Van Zandt T. (1995) Continuous Approximation in the Study of Hierarchies. *The Rand Journal of Economics*, 26, No. 4, pp 575–590.

Van Zandt T. (1996) Organizations with an Endogenous Number of Information Processing Agents. Organizations with Incomplete Information. Cambridge: Cambridge University Press.

Williamson O. (1967) Hierarchical Control and Optimal Firm Size. *Journal of Political Economy*, 75, pp 123–138.

Williamson O. (1975) Markets and Hierarchies. New York: Free Press.

Бурков В. Н., Новиков Д. А. (1999) Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ.

Верхайм П., Храмова И. (1997) Рыночные структуры продовольственного комплекса России в условиях переходной экономики. *Вопросы экономики,* 8, с. 112–124.

Воронин А. А., Мишин С. П. (2001) Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева. Вестн. Волг. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика, с. 78–98.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2002a) Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы. *Автоматика и телемеханика,* 8, с. 136–150.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2002b) Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы. *Автоматика и телемеханика,* 5, с. 120–132.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2003) Оптимальные иерархические структуры. М.: Институт проблем управления РАН.

Губко М. В. (2002) Структура оптимальной организации континуума исполнителей. *Автоматика и телемеханика,* 12, с. 116–130.

Губко М. В., Мишин С. П. (2002) Оптимальная структура системы управления технологическими связями. Материалы международной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 27–29 ноября, с. 50–54.

Дементьев В. Т., Ерзин А. И., Ларин Р. М. и др. (1996) Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та.

Мишин С. П. (2001) Структура многоуровневой системы в изменяющейся внешней среде. Труды международной конференции «Теория активных систем». М.: ИПУ РАН, 19–21 ноября, том 1, с. 54–55.

Мишин С. П. (2002a) Оптимальное управление структурой организационной системы. Сборник трудов международной конференции «Современные сложные системы управления». Липецк: ЛГТУ, 12–14 марта, с. 101–102.

Мишин С. П. (2002b) Стоимость реорганизации структуры системы. Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та, с. 178–198.

Мишин С. П. (2003a) Динамическая задача синтеза оптимальной иерархической структуры. Управление большими системами. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, с. 55–75.

Мишин С. П. (2003b) Оптимальные иерархические структуры. Труды международной конференции «Теория активных систем». М.: ИПУ РАН, 17–19 ноября, том 1, с. 57–58.

Мишин С. П. (2004a) Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах. *Автоматика и телемеханика,* 5, с. 96–119.

Мишин С. П. (2004b) Модель оптимальной структуры контроля производственной цепи. Труды IV международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». М.: ИПУ РАН, 18–20 октября, с. 154–159.

Новиков Д. А. (1999) Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления».

Новиков Д. А. (2003) Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН. – 108 с.

Овсиевич Б. И. (1979) Модели формирования организационных структур. Л.: Наука.

Цвиркун А. Д. (1982) Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука.

Подписано в печать 15.12.2004. Формат 60x88 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная №1.
Печ. л. 16,0. Тираж 500 экз. Заказ 58.